ELEMENTI
DI
GEOMETRIA SOLIDA

CON NOTE

DI

A. M. LEGENDRE

MEMBRO DELL' ISTITUTO
E DELLA LEGIONE D' ONORE, DELLA SOCIETA' REALE
DI LONDRA ECC.

VERSIONE DAL FRANCESE

CORRETTA ED ACCRESCIUTA DI NOTE

PER

CAMILLO ZOCCHI

NAPOLI
TIPOGRAFIA SIMONIANA
1859.

ELEMENTI

DI

GEOMETRIA SOLIDA (a)

LIBRO QUINTO

I PIANI E GLI ANGOLI SOLIDI

DEFINIZIONI

I. Una linea retta è *perpendicolare ad un piano*, quando è perpendicolare a tutte le rette che passano pel suo *piede* nel piano (*Scol. Prop. 4*). Reciprocamente il piano è perpendicolare alla linea.

Il *piede* della perpendicolare è il punto ove questa linea incontra il piano.

II. Una linea è *parallela ad un piano*, quando non può incontrarlo a qualunque distanza si prolunghino l'uno e l'altra. Reciprocamente il piano è parallelo alla linea.

III. Due *piani* sono *paralleli* fra loro, quando non possono incontrarsi a qualunque distanza si prolunghino l'uno e l'altro.

IV. Si dimostrerà (*Prop. 3*) che la intersezione comune di due piani che s' incontrano è una linea retta; posto ciò, *l'angolo* o *l'inclinazione* scambievole *di due piani* è la quantità più o meno grande per la quale sono di-

(a) Geometria solida, *o con altro vocabolo più preciso*, Stereometria, da στερεός (stereos) solido, *e da* μέτρον (metron) misura. *Scienza che tratta della misura dei solidi.* (Il Trad.)

stanti l'uno dall' altro; questa quantità si misura (*Prop.* 7) dall' angolo che fanno fra loro le due perpendicolari tirate in ciascuno di questi piani ad un medesimo punto della comune intersezione.

Questo angolo può essere acuto, retto od ottuso.

V. Se l' angolo che misura la inclinazione scambievole di due piani è retto, i due *piani* sono *perpendicolari* fra loro.

VI. *Angolo solido* è lo spazio angolare compreso fra più piani che si riuniscono in un medesimo punto.

Fig. 199. Così l'angolo solido S (*fig.* 199) è formato dalla riunione dei piani ASB, BSC, CSD, DSA.

Sono necessarl almeno tre piani per formare un angolo solido.

PROPOSIZIONE PRIMA.

TEOREMA.

Una linea retta non può essere in parte sopra un piano ed in parte fuori.

Infatti, secondo la definizione del piano (*Defin. VI, lib. I*), qualora una linea retta à due punti comuni con un piano, essa è tutta intera in questo piano. Quindi *una linea retta* etc. C. B. D.

Scolio. Per riconoscere se una superficie è piana, bisogna applicare una linea retta in differenti sensi su questa superficie, ed osservare se tocca la superficie in tutta la sua estensione.

PROPOSIZIONE II.

TEOREMA.

Due linee rette che si tagliano, sono in un medesimo piano e ne determinano la posizione.

Fig. 181. Siano AB, AC (*fig.* 181) due linee rette che si tagliano in A; dico che sono in un medesimo piano e ne determinano la posizione.

Si può concepire un piano ove trovasi la linea retta AB; se in seguito si fa girare questo piano intorno ad AB, finchè passi pel punto C, allora la linea AC che à due suoi punti A e C in questo piano ci sarà tutta intera;

dunque la posizione di questo piano è determinata dalla sola condizione di contenere le due rette AB, AC. Quindi *due linee rette* etc. C. B. D.

Corollario I. Un triangolo ABC, o tre punti A, B, C, non in linea retta, determinano la posizione di un piano.

Corollario II. Dunque anche due parallele AB, CD Fig. 182. (*fig. 182*) determinano la posizione di un piano; infatti, se tirisi la secante EF, il piano delle due rette AE, EF sarà quello delle parallele AB, CD.

PROPOSIZIONE III.

TEOREMA.

Se due piani si tagliano, la loro comune intersezione sarà una linea retta.

Infatti, se tra i punti comuni ai due piani se ne trovassero tre che non fossero in linea retta, i due piani di cui si tratta, passando ciascuno per questi tre punti, non formerebbero che un solo e medesimo piano (*Corol. I, Prop. 2*); il che è contro la supposizione; dunque tutti i punti comuni a due piani che si tagliano, debbono essere in una linea retta. Quindi *se due piani* etc. C. B.D.

PROPOSIZIONE IV.

TEOREMA.

Se una linea retta qualunque è perpendicolare a due altre linee rette che s' intersecano al suo piede in un piano, essa sarà perpendicolare a qualunque altra retta condotta pel suo piede nello stesso piano, e quindi sarà perpendicolare al piano.

Se la linea retta AP (*fig. 183*) è perpendicolare alle Fig. 183. due altre PB, PC che s' intersecano al suo piede nel piano MN; dico che essa sarà perpendicolare ad una retta qualunque PQ condotta pel suo piede nello stesso piano, e quindi essa sarà perpendicolare al piano MN.

Per un punto Q preso a volontà sopra PQ tirisi la linea retta BC nell'angolo BPC, di maniera che BQ=QC (*Probl. 5, lib. III*); tirinsi AB, AQ, AC.

La base BC essendo divisa in due parti eguali nel punto Q, il triangolo BPC darà (*Prop. 14, lib. III*)

$$\overline{PC}^2 + \overline{PB}^2 = 2\overline{PQ}^2 + 2\overline{QC}^2.$$

Il triangolo BAC darà similmente

$$\overline{AC}^2 + \overline{AB}^2 = 2\overline{AQ}^2 + 2\overline{QC}^2.$$

Togliendo la prima eguaglianza della seconda si avrà

$$\overline{AC}^2 - \overline{PC}^2 + \overline{AB}^2 - \overline{PB}^2 = 2\overline{AQ}^2 - 2\overline{PQ}^2,$$

ed osservando che i triangoli APC, APB, ambidue rettangoli in P, danno

$$\overline{AC}^2 - \overline{PC}^2 = \overline{AP}^2$$

ed

$$\overline{AB}^2 - \overline{PB}^2 = \overline{AP}^2,$$

si avrà

$$\overline{AP}^2 + \overline{AP}^2 = 2\overline{AQ}^2 - 2\overline{PQ}^2;$$

dunque prendendo la metà da ambe le parti si à

$$\overline{AP}^2 = \overline{AQ}^2 - \overline{PQ}^2$$

ovvero

$$\overline{AQ}^2 = \overline{AP}^2 + \overline{PQ}^2;$$

dunque il triangolo APQ è rettangolo in P (*Prop. 13, lib. III*); dunque AP è perpendicolare a PQ. Quindi *se una linea retta* etc. C. B. D.

Scolio. Da ciò vedesi che non solamente è possibile che una linea retta sia perpendicolare a tutte quelle che passano pel suo piede in un piano, ma che ciò è tutte le volte che questa linea è perpendicolare a due sole rette condotte nel piano: questo è quello che dimostra la legittimità della definizione I.

Corollario I. La perpendicolare AP è minore di una obliqua qualunque AQ; essa dunque misura la vera distanza dal punto A al piano PQ.

Corollario II. Da un punto P dato sopra un piano, non si può alzare che una sola perpendicolare a questo piano; infatti se si potessero alzare due perpendicolari dallo stesso punto P, conducasi per queste due perpen-

dicolari un piano, la cui intersezione col piano NM sia PQ; allora le due perpendicolari delle quali si tratta sarebbero perpendicolari alla linea PQ nello stesso punto e nel medesimo piano, il che è impossibile.

È parimente impossibile di abbassare da un punto dato fuori di un piano due perpendicolari a questo piano; infatti siano AP, AQ queste due perpendicolari, allora il triangolo APQ avrebbe due angoli retti APQ, AQP, il che è impossibile.

PROPOSIZIONE V.

TEOREMA.

Le oblique egualmente lontane dalla perpendicolare (a) sono eguali; e, di due oblique disugualmente lontane dalla perpendicolare, quella che se ne allontana di più è la maggiore.

Siano le oblique AB, AC, AD (*fig. 184*) egualmente lontane dalla perpendicolare AP al piano MN, cioè che sieno le distanze PB, PC, PD eguali; dico che queste oblique sono eguali fra loro; e sia di più la obliqua AE più lontana dell'altra obliqua AD, cioè che sia PE maggiore di PD; dico l'obliqua AE essere maggiore dell'obliqua AD. Fig. 184.

Infatti gli angoli APB, APC, APD essendo retti, i triangoli APB, APC, APD ànno un angolo eguale compreso fra lati eguali; dunque saranno eguali; dunque le ipotenuse AB, AC, AD sono eguali fra loro.

Similmente, la distanza PE essendo maggiore di PD o della eguale PB, è chiaro che l'obliqua AE è maggiore di AB o della eguale AD. Quindi *le oblique egualmente lontane* etc. C. B. D.

Corollario. Tutte le oblique eguali AB, AC, AD etc. terminano alla circonferenza BCD descritta dal piede D della perpendicolare come centro; dunque essendo dato un punto A fuori di un piano, se si vuol trovare su questo piano il punto P ove cadrebbe la perpendicolare abbassata da A, bisogna segnare sopra questo piano tre punti B, C, D, egualmente lontani dal punto A, e cercare in

(*a*) Aggiungi *ad un piano* (Il Trad.).

seguito il centro del circolo che passa per questi punti; questo centro sarà il punto cercato P.

Scolio. L' angolo ABP è ciò che dicesi *inclinazione dell' obliqua AB sopra il piano MN*; vedesi che questa inclinazione è eguale per tutte le oblique AB, AC, AD etc. che si allontanano egualmente dalla perpendicolare, perchè tutti gli angoli ABP, ACP, ADP sono eguali fra loro.

PROPOSIZIONE VI.

TEOREMA.

Sia una linea retta perpendicolare ad un piano, ed altra retta situata in questo piano; se dal piede della retta perpendicolare si abbassi la perpendicolare alla retta situata nel piano, e se si unisce il punto ove la perpendicolare abbassata incontra la retta situata nel piano con qualunque altro punto della perpendicolare al piano, questa congiungente sarà perpendicolare alla retta situata nel piano.

Fig. 185. Sia AP una perpendicolare al piano (*fig. 185*) MN, e BC una linea retta situata in questo piano, se dal piede P della perpendicolare si abbassi PD perpendicolare a BC, e si congiunga AD; dico AD essere perpendicolare ad AC.

Prendasi DB = DC, e tirisi PB, PC, AB, AC; poichè DB = DC, l' obliqua PB = PC; e per rapporto alla perpendicolare AP, poichè PB = PC, l' obliqua AB = AC (*Prop. 5*); dunque la linea AD à due suoi punti A e D egualmente distanti dalle estremità B e C; dunque AD è perpendicolare al mezzo di BC. Quindi *se una linea retta* etc. C. B. D.

Corollario. Si vede ancora che BC è perpendicolare al piano APD, poichè BC è perpendicolare nel tempo stesso alle due rette AD, PD.

Scolio. Le due linee AE, BC, offrono l' esempio di due linee rette che non s' incontrano perchè non sono situate nello stesso piano. La minore distanza di queste linee è la retta PD che è ad un tempo stesso perpendicolare alla linea AP ed alla linea BC. La distanza PD è la minore fra queste due linee; poichè se si congiungono due altri punti come A e B, avremo AB > AD, AD > PD; dunque con più ragione AB > PD.

Le due linee AE, CB, quantunque non situate in un

medesimo piano, fanno tra loro un angolo retto, poichè AD e la parallela condotta per un suo punto alla linea BC faranno tra loro un angolo retto. Parimente la linea AB e la linea PD che rappresentano due rette qualunque, non situate nello stesso piano, fanno fra loro il medesimo angolo che farebbe con AB la parallela a PD condotta per un punto di AB.

PROPOSIZIONE VII.

TEOREMA.

Se una linea retta è perpendicolare ad un piano, qualunque linea parallela a questa perpendicolare sarà perpendicolare allo stesso piano.

Sia la linea AP (*fig. 186*) perpendicolare al piano MN, e sia DE parallela ad AP; dico che DE sarà anche perpendicolare al piano MN. Fig. 186.

Secondo le parallele AP, DE, menisi il piano, la cui intersezione col piano MN sarà PD; nel piano MN tirisi BC perpendicolare a PD, e congiungasi AD.

Secondo il corollario del teorema precedente, BC è perpendicolare al piano APDE; dunque l'angolo BDE è retto; ma l'angolo EDP è ancora retto, poichè AP è perpendicolare a PD, e che DE è parallela ad AP; dunque la linea DE è perpendicolare alle due rette DP, DB; essa dunque è perpendicolare al loro piano MN. Quindi *se una linea retta* etc. C. B. D.

Corollario I. Reciprocamente, se le rette AP, DE sono perpendicolari allo stesso piano MN, esse saranno parallele; poichè, se non lo fossero, conducasi pel punto D la parallela ad AP, questa parallela sarà perpendicolare al piano MN; dunque si potrebbero da un medesimo punto D alzare due perpendicolari ad un medesimo piano; il che è impossibile (*Corollario II, Prop. 4*).

Corollario II. Due linee A e B parallele ad una terza C sono parallele fra loro; poichè immaginandosi un piano perpendicolare alla linea C, le linee A e B parallele a questa perpendicolare saranno perpendicolari al medesimo piano; dunque, pel corollario precedente, esse saranno parallele fra loro.

Si suppone che le tre linee non sono in un medesimo piano, altrimenti la proposizione sarebbe già nota (*Prop. 25, lib. I*).

PROPOSIZIONE VIII.

TEOREMA.

Se una linea retta è parallela ad altra retta condotta in un piano, essa sarà parallela a questo piano.

Fig. 187. Sia la linea AB (*fig. 187*) parallela alla retta CD condotta nel piano MN; dico che sarà parallela a questo piano.

Infatti, se la linea AB che è nel piano ABCD incontrasse il piano MN, ciò non potrebbe essere che in qualche punto della linea CD, intersezione comune dei due piani; ora AB non può incontrare CD, poichè parallele; essa dunque non incontrerà neppure il piano MN; dunque sarà parallela a questo piano (*Def. 2*). Quindi *se una linea retta* etc. C. B. D.

PROPOSIZIONE IX.

TEOREMA.

Due piani perpendicolari ad una stessa retta sono paralleli fra loro.

Fig. 188. Siano i due piani MN, PQ (*fig. 188*) perpendicolari alla stessa retta AB; dico che questi piani sono paralleli fra loro.

Infatti se s' incontrassero in qualche parte, sia O un loro punto comune, tirinsi OA, OB; la linea AB, perpendicolare al piano MN è perpendicolare alla retta OA condotta al suo piede in questo piano; per la medesima ragione AB è perpendicolare a BO; dunque OA, BO sarebbero due perpendicolari abbassate dal medesimo punto O sulla stessa linea retta; il che è impossibile; dunque i piani MN, PQ non possono incontrarsi; dunque sono paralleli. Quindi *se due piani* etc. C. B. D.

PROPOSIZIONE X.

TEOREMA.

Le intersezioni di due piani paralleli con un terzo piano sono parallele fra loro.

Siano le intersezioni EF, GH (*fig. 189*) di due piani paralleli MN, PQ, con un terzo piano FG; dico che EF, GH sono parallele. Fig. 189.

Infatti se le linee EF, GH situate in uno stesso piano non sono parallele, prolungate s'incontreranno; dunque i piani MN, PQ, nei quali esse sono, s' incontrerebbero pure; dunque non sarebbero paralleli; il che è contro la supposizione; dunque *le intersezioni di due piani* etc. C. B. D.

PROPOSIZIONE XI.

TEOREMA.

Ogni linea retta perpendicolare ad un piano è perpendicolare ancora al piano parallelo al piano dato.

Sia la linea AB (*fig. 188*) perpendicolare al piano MN; dico che sarà perpendicolare ancora al piano PQ parallelo al piano MN. Fig. 188.

Tirisi a piacimento la linea BC nel piano PQ, per AB, BC conducasi un piano ABC, la cui intersezione col piano MN sia AD; l'intersezione AD sarà parallela a BC (*Prop. 10*); ma la linea AB perpendicolare al piano MN è perpendicolare alla retta AD; dunque essa sarà ancora perpendicolare alla parallela BC; e poichè la linea AB è perpendicolare a qualunque retta BC menata pel suo piede nel piano PQ, ne segue che essa è perpendicolare al piano PQ. Dunque *ogni linea retta perpendicolare* etc. C. B. D.

PROPOSIZIONE XII.

TEOREMA.

Le parallele comprese fra due piani paralleli sono eguali.

Fig. 189. Siano le parallele EG, FH (*fig. 189*) comprese fra i due piani paralleli MN, PQ; dico che queste parallele sono eguali.

Per le parallele EG, FH facciasi passare il piano EGFH che incontrerà i piani paralleli secondo EF, GH. Le intersezioni EF, GH sono parallele tra loro (*Prop. 10*), come pure EG, FH; dunque la figura EGHF è un parallelogrammo; dunque EG $=$ FH. Quindi *le parallele* etc. C. B. D.

Corollario. Segue da ciò che *due piani paralleli sono da per tutto ad egual distanza;* poichè se EG ed FH sono perpendicolari ai due piani MN, PQ, esse saranno parallele fra loro (*Prop. 7*); dunque saranno eguali.

PROPOSIZIONE XIII.

TEOREMA.

Se due angoli non situati nello stesso piano ànno i lati paralleli e diretti nel medesimo senso, questi angoli saranno eguali ed i loro piani saranno paralleli.

Fig. 190. Siano i due angoli CAE, DBF (*fig. 190*) non situati nello stesso piano, e che abbiano il lato CA parallelo a DB, il lato AE parallelo a BF, e tutti diretti nello stesso senso; dico questi angoli essere eguali ed i loro piani essere paralleli.

Prendasi AC $=$ BD ed AE $=$ BF, e congiungansi CE, DF, AB, CD, EF. Poichè AC è eguale e parallela a BD, la figura ABDC è un parallelogrammo (*Prop. 30, lib. I*); dunque CD è eguale e parallela ad AB. Per simile ragione EF è eguale e parallela ad AB; dunque ancora CD è eguale e parallela ad EF, la figura CEFD è dunque un parallelogrammo, e perciò il lato CE è eguale e parallelo a DF; dunque i triangoli CAE, DBF sono equilateri fra loro; quindi l'angolo CAE $=$ DBF.

In secondo luogo dico che il piano ACE è parallelo al piano BDF; infatti suppongasi che il piano parallelo a BDF condotto pel punto A incontri le linee EF, CD in punti diversi da C ed E, per esempio in G ed H; allora secondo la proposizione XII, le tre linee AB, GD, FH saranno eguali; ma le tre AB, CD, EF sono pure eguali; dunque si avrebbe CD=GD, ed FH = EF; il che è assurdo, nato dall'aver supposto che il piano parallelo a BDF condotto pel punto A incontrasse le linee EF, CD in punti diversi da C ed E; e perciò deve incontrarle nei punti C ed E; dunque il piano ACE è parallelo a BDF. Quindi *se due angoli* etc. C. B. D.

Corollario. Se due piani paralleli MN, PQ, sono incontrati da due altri piani CABD, EABF, gli angoli CAE, DBF, formati dalle intersezioni dei piani paralleli, saranno eguali; perchè l'intersezione AC è parallela a BD (*Prop. 10*), AE parallela a BF; dunque l'angolo CAE=DBF.

PROPOSIZIONE XIV.

TEOREMA.

Se tre rette non situate nello stesso piano sono eguali e parallele, i triangoli formati dall'una parte e dall'altra, congiungendo le estremità di queste rette, saranno eguali, ed i loro piani saranno paralleli.

Siano le tre rette AB, CD, EF (*fig. 190*) non situate nello stesso piano, eguali e parallele; dico che i triangoli ACE, BDF, formati da una parte e dall'altra, congiungendo le estremità di queste rette, saranno eguali, ed i loro piani saranno paralleli.

Fig. 190.

Infatti siccome AB è eguale e parallela a CD, la figura ABDC è un parallelogrammo; dunque il lato AC è eguale e parallelo a BD. Per la stessa ragione i lati AE, BF, sono eguali e paralleli, come pure CE, DF; dunque i due triangoli ACE, BDF sono eguali.

In secondo luogo dico che il piano ACE è parallelo al piano BDF; infatti suppongasi che il piano parallelo a BDF, condotto pel punto A, incontri le linee EF, CD in punti diversi di C ed E, per esempio, in G ed H; allora secondo la proposizione XII le tre linee AB, GD, FH saranno eguali, ma le tre linee AB, CD, EF sono pure eguali; dunque si avrebbe CD=GD, ed FH=EF; il che è assurdo, nato dall'aver supposto che il piano pa-

rallelo a BDF condotto pel punto A incontrasse le linee EF, CD in punti diversi da C ed E; e perciò deve incontrarle in C ed E; dunque il piano ACE è parallelo a BDF. Quindi *se tre rette* etc. C. B. D.

PROPOSIZIONE XV.

TEOREMA.

Due rette comprese fra tre piani paralleli sono tagliate in parti proporzionali.

Fig. 191. Siano le due rette AB, CD (*fig. 191*), e che la linea AB incontri i piani paralleli MN, PQ, RS in A, E, B, e che la linea CD incontri i medesimi piani in C, F, D; dico che si avrà

AE : EB :: CF : FD.

Tirisi AD che incontri il piano PQ in G, e congiungansi AC, EG, GF, BD; le intersezioni EG, BD dei piani paralleli PQ, RS per il piano ABD sono parallele (*Prop. 10*); dunque

AE : EB :: AG : GD;

similmente le intersezioni AC, GF, essendo parallele, si à

AG : GD :: CF : FD;

dunque, pel rapporto comune AG : GD, si avrà

AE : EB :: CF : FD.

Quindi *due rette* etc. C. B. D.

PROPOSIZIONE XVI.

TEOREMA

Sia un quadrilatero qualunque situato o non situato nello stesso piano, se si taglino i lati opposti proporzionalmente con due rette terminate ai lati del quadrilatero, queste rette si taglieranno in un punto che resteranno divise ciascuna proporzionalmente ai lati del quadrilatero divisi dall'altra retta.

Fig. 192. Sia ABCD (*fig 192*) un quadrilatero qualunque situato o non situato in un medesimo piano, se si taglino i lati opposti proporzionalmente con due rette EF, GH, talmente che si abbia

AE : EB :: DF : FC

BG : GC :: AH : HD;

dico che le rette EF, GH si taglieranno in un punto M in modo che si avrà

$$HM : MG :: AE : EB$$

ed

$$EM : MF :: AH : HD.$$

Conducasi per AD un piano qualunque AbHcD che non passi per GH; per i punti E, B, C, F conducansi a GH le parallele Ee, Bb, Cc, Ff che incontrino questo piano in e, b, c, f.

Per le parallele Bb, GH, Cc (*Prop.* 15, *lib. III*) si avrà

$$bH : Hc :: BG : GC :: AH : HD;$$

dunque i triangoli AHb, DHc sono simili (*Prop.* 20, *lib. III*). Si avrà di più

$$Ae : eb :: AE : EB$$

e

$$Df : fc :: DF : FC;$$

dunque

$$Ae : eb :: Df : fc,$$

o, *componendo*,

$$Ae : Df :: Ab : Dc,$$

ma per i triangoli simili AHb, DHc si à

$$Ab : Dc :: AH : HD;$$

dunque

$$Ae : Df :: AH : HD;$$

d'altronde i triangoli AHb, cHD, essendo simili, l'angolo HAe = HDf; dunque i triangoli AHe, DHf sono simili (*Prop.* 20, *lib III*); dunque l'angolo AHe = DHf. Ne segue in primo luogo che eHf è una linea retta, e che perciò le tre parallele Ee, GH, Ff sono situate in un medesimo piano, il quale conterrà le due rette EF, GH; dunque *queste debbono tagliarsi in un punto M*. In seguito per le parallele Ee, MH, Ff si avrà

$$EM : MF :: eH : Hf :: AH : HD.$$

Con una costruzione simile, rapportata al lato AB, si dimostrerebbe che

$$HM : MG :: AE : EB.$$

Quindi *se un quadrilatero* etc. C. B. D.

PROPOSIZIONE XVII.

TEOREMA.

L'angolo compreso fra due piani che si segano, può essere misurato (conforme alla definizione IV) dall'angolo che fanno fra loro le due perpendicolari condotte in ciascuno di questi piani all'intersezione comune.

Fig. 193. L'angolo compreso fra i due piani MAN (*fig. 193*), MAP può essere misurato dall'angolo NAP che fanno fra loro le due perpendicolari AN, AP condotte in ciascuno di questi piani all'intersezione comune AM.

Per dimostrare la legittimità di questa misura bisogna provare:

1.° Che essa è costante, ossia che sarebbe la stessa a qualunque punto dell'intersezione comune si conducessero le perpendicolari.

Infatti, se si prende un altro punto M, e si conducono MC nel piano MN, ed MB nel piano MP perpendicolari alla comune intersezione AM; poichè MB ed AP sono perpendicolari ad una medesima retta AM, esse sono parallele fra loro. Per la medesima ragione MC è parallela ad AN; dunque l'angolo BMC = PAN (*Prop. 13*); dunque è indifferente il condurre le perpendicolari al punto M od al punto A; l'angolo compreso sarà sempre lo stesso.

2.° Bisogna provare che se l'angolo dei due piani aumenta o diminuisce in un certo rapporto, l'angolo PAN aumenterà o diminuirà nel rapporto medesimo.

Nel piano PAN descrivasi col centro A e con un raggio a piacimento l'arco NDP; col centro M e con un raggio eguale descrivasi l'arco CEB; tirisi AD a piacimento: i due piani PAN, BMC, essendo perpendicolari ad una medesima retta MA, saran paralleli (*Prop. 9*); dunque le intersezioni AD, ME di questi due piani con un terzo AMD saranno parallele; dunque l'angolo BME sarà eguale a PAD (*Prop. 13*).

Chiamisi per un momento *cuneo* l'angolo formato dai due piani PM, MN: posto ciò se l'angolo DAP fosse eguale a DAN, è chiaro che il cuneo DAMP sarebbe eguale al cuneo DAMN, perchè la base PAD si situerebbe esattamente sulla sua eguale DAN, l'altezza AM sarebbe sempre la stessa; dunque i due cunei coinciderebbero l'uno

coll' altro. Si vede similmente che se l' angolo DAP fosse contenuto un certo numero preciso di volte nell' angolo PAN, il cuneo DAMP sarebbe contenuto altrettante volte nel cuneo PAMN. D'altronde dal rapporto in numeri interi ad un rapporto qualunque la conclusione è legittima, ed è stata dimostrata tale in una circostanza interamente simile (*Prop. 17, lib. II*); dunque, qualunque siasi il rapporto dell' angolo DAP all' angolo PAN, il cuneo DAMP sarà in questo medesimo rapporto col cuneo PAMN; dunque l' angolo NAP può esser preso per la misura del cuneo PAMN o dell' angolo che fanno fra loro i due piani MAP, MAN.

Quindi *l' angolo compreso* etc. C. B. D.

Scolio. È lo stesso per gli angoli formati da due piani, che per gli angoli formati da due rette. Così allorchè due piani s' intersegano scambievolmente, gli angoli opposti al vertice sono eguali, e gli angoli adiacenti equivalgono insieme a due angoli retti; dunque se un piano è perpendicolare ad un altro, quest' ultimo è perpendicolare al primo. Parimente nell' incontro di piani paralleli con un terzo piano si avranno le medesime eguaglianze di angoli e le medesime proprietà che nell' incontro di due linee parallele con una terza linea.

PROPOSIZIONE XVIII.

TEOREMA.

Se una linea è perpendicolare ad un piano, ogni piano condotto per questa linea sarà perpendicolare allo stesso piano.

Sia la linea AP (*fig. 194*) perpendicolare al piano MN; ogni piano APB condotto per AP sarà perpendicolare allo stesso piano MN. Fig. 194.

Sia BC l' intersezione dei piani AB, MN; se nel piano MN si conduca DE perpendicolare a BP, la linea AP, essendo perpendicolare al piano MN, sarà perpendicolare a ciascuna delle due rette BC, DE; ma l' angolo APD, formato dalle due perpendicolari PA, PD all' intersezione comune BP, misura l' angolo dei due piani AB, MN; dunque poichè quest' angolo è retto, i due piani sono perpendicolari fra loro (*Def. 5*).

Quindi *se una linea* etc. C. B. D.

Scolio. Quando tre rette, come AP, BP, DP sono

perpendicolari fra loro, ciascuna di queste linee è perpendicolare al piano delle altre due, ed i tre piani sono perpendicolari fra loro.

PROPOSIZIONE XIX.

TEOREMA.

Se un piano è perpendicolare ad altro piano, e se in uno di questi piani si conduca una linea perpendicolare alla loro comune intersezione, questa linea sarà perpendicolare ancora all' altro piano.

Fig. 194. Sia il piano AB perpendicolare al piano MN (*fig. 194*), e che nel piano AB si conduca la linea PA perpendicolare alla intersezione comune PB; dico che PA sarà perpendicolare al piano MN.

Infatti, se nel piano MN si conduca DP perpendicolare a PB, l' angolo APD sarà retto, giacchè i piani sono perpendicolari fra loro; dunque la linea AP è perpendicolare alle due rette PB, PD; dunque essa è perpendicolare al loro piano MN. Quindi *se un piano è perpendicolare* etc. C.B.D.

Corollario. Se il piano AB è perpendicolare al piano MN, e per un punto P dell' intersezione comune si alzi una perpendicolare al piano MN; dico che questa perpendicolare sarà nel piano AB: infatti se non fosse tale, si potrebbe condurre nel piano AB una perpendicolare AP all' intersezione comune BP, la quale sarebbe nel medesimo tempo perpendicolare al piano MN; dunque nel medesimo punto P vi sarebbero due perpendicolari al piano MN, il che è impossibile (*Corol. II, Prop. 4*).

PROPOSIZIONE XX.

TEOREMA.

Se due piani che s' intersegano sono perpendicolari ad un terzo, la loro comune intersezione sarà perpendicolare a questo terzo piano.

Fig. 194. Se i due piani AB, AD che s' intersegano (*fig. 194*) sono perpendicolari ad un terzo MN; la loro intersezione comune AP sarà perpendicolare a questo terzo piano.

Infatti, se pel punto P si alzi una perpendicolare al

piano MN, questa perpendicolare deve trovarsi ad un tempo nel piano AB e nel piano AD (*Corol. Prop. 19*); essa dunque è la loro comune intersezione AP. Quindi *se due piani* etc. C. B. D.

PROPOSIZIONE XXI.

TEOREMA.

Se un angolo solido è formato da tre angoli piani, la somma di due qualunque di questi angoli sarà maggiore del terzo.

Non è necessario di dimostrar la proposizione se non quando l' angolo piano che si paragona colla somma degli altri due, è maggiore di ciascuno di questi ultimi. Sia dunque l' angolo solido S (*fig. 195*) formato da tre angoli piani ASB, ASC, BSC, e suppongasi che l' angolo ASB sia il maggiore dei tre; dico che sarà ASB $<$ ASC $+$ BSC. Fig. 195.

Facciasi nel piano ASB l' angolo BSD $=$ BSC; tirisi a piacimento la retta ADB; ed avendo preso SC $=$ SD, tirinsi AC, BC.

I due lati BS, SD sono eguali ai due BS, SC, l'angolo BSD$=$BSC; dunque i due triangoli BSD, BSC sono eguali; dunque BD $=$ BC. Ma si à AB $<$ AC $+$ BC; togliendo da una parte BD, e dall' altra la sua eguale BC, resterà AD $<$ AC. I due lati AS, SD sono eguali ai due AS, SC, il terzo AD è minore del terzo AC; dunque (*Prop. 10, lib. I*) l' angolo ASD $<$ ASC. Aggiugnendo BSD$=$BSC, si avrà ASD $+$ BSD o sia ASB $<$ ASC $\times$ BSC. Quindi *se un angolo solido* etc. C. B. D.

PROPOSIZIONE XXII.

TEOREMA.

La somma degli angoli piani che formano un angolo solido è sempre minore di quattro angoli retti.

Sia l' angolo solido S (*fig. 196*); dico che la somma degli angoli piani ASB, BSC etc. che formano tale angolo solido, è minore di quattro angoli retti. Fig. 196.

Taglisi l' angolo solido S con un piano qualunque ABCDE; da un punto O preso in questo piano conducansi a tutti gli angoli le linee rette OA, OB, OC, OD, OE.

La somma degli angoli de' triangoli ASB, BSC, etc., formati intorno al vertice S, equivale alla somma degli angoli di un egual numero di triangoli AOB, BOC, etc. formati intorno al vertice O. Ma al punto B gli angoli ABO, OBC presi insieme fanno l'angolo ABC minore della somma degli angoli ABS, SBC (*Prop. 21*); parimente al punto C si à $BCO + OCD < BCS + SCD$; e così rispetto a tutti gli angoli del poligono ABCDE. Segue da ciò che nei triangoli, il cui vertice è in O, la somma degli angoli alla base è minore della somma degli angoli alla base nei triangoli, il cui vertice è in S; dunque, per compensazione, la somma degli angoli formati intorno al punto O è maggiore della somma degli angoli intorno al punto S. Ma la somma degli angoli intorno al punto O è eguale a quattro angoli retti (*Prop. 5, lib. 1*); dunque la somma degli angoli piani, che formano l'angolo solido S, è minore di quattro angoli retti. Quindi *la somma* etc. C. B. D.

Scolio. Questa dimostrazione suppone che l' angolo solido sia convesso, ovvero che il piano d' una faccia prolungato non possa mai tagliare l' angolo solido: se fosse altrimenti, la somma degli angoli piani non avrebbe più limite, e potrebb' essere d' una grandezza qualunque.

PROPOSIZIONE XXIII.

TEOREMA.

Se due angoli sono composti di tre angoli piani respettivamente eguali, i piani nei quali sono gli angoli eguali, saranno egualmente inclinati fra loro.

Fig. 197. Sia l' angolo $ASC = DTF$ (*fig. 197*), l' angolo $ASB = DTE$, e l' angolo $BSC = ETF$; dico che i due piani ASC, ASB avranno fra loro una inclinazione eguale a quella dei due piani DTF, DTE.

Prendasi SB a piacimento, conducasi BO perpendicolare al piano ASC; dal punto O, dove questa perpendicolare incontra il piano, tirinsi OA, OC perpendicolari sopra SA, SC; uniscansi AB, BC; prendasi poi $TE = SB$; conducasi EP perpendicolare sul piano DTF; dal punto P conducansi PD, PF perpendicolari sopra TD, TF; infine congiungansi DE, EF.

Il triangolo SAB è rettangolo in A, ed il triangolo

TDE in D (*Prop. 6*); e poichè l'angolo ASB=DTE, si à pure SBA=TED. D'altronde SB=TE; dunque il triangolo SAB è eguale al triangolo TDE, (*Prop. 5, lib. I*); dunque SA=TD, ed AB=DE. Si dimostrerà similmente che SC=TF, e BC=EF. Ciò posto, il quadrilatero SAOC è eguale al quadrilatero TDPF; poichè ponendo l'angolo ASC sul suo eguale DTF, per essere SA=TD, ed SC=TF, il punto A cadrà in D, ed il punto C in F. Nel medesimo tempo AO, perpendicolare ad SA, cadrà sopra DP perpendicolare a TD, e parimente OC sopra PF; dunque il punto O cadrà sul punto P, e si avrà AO=DP. Ma i triangoli AOB, DPE sono rettangoli in O e P, l'ipotenusa, AB=DE, ed il lato AO=DP; dunque questi triangoli sono eguali (*Prop. 18, lib. I*); dunque l'angolo OAB=PDE. L'angolo OAB è l'inclinazione dei due piani ASB, ASC; l'angolo PDE è l'inclinazione dei due piani DTE, DTF; dunque queste due inclinazioni sono eguali fra loro.

Bisogna osservare che l'angolo A del triangolo rettangolo OAB non è propriamente l'inclinazione dei due piani ASB, ASC, se non quando la perpendicolare BO cade per rapporto ad SA dalla medesima parte di SC; se cadesse dall' altra parte, allora l'angolo dei due piani sarebbe ottuso, ed unito all'angolo A del triangolo OAB, farebbe due angoli retti. Ma, nel medesimo caso, l'angolo dei due piani TDE, TDF sarebbe parimente ottuso, ed, unito all'angolo D del triangolo PDE, farebbe due angoli retti; dunque, siccome l'angolo A sarebbe sempre eguale a D, si conchiuderebbe similmente che l'inclinazione dei due piani ASB, ASC è eguale a quella dei due piani TDE, TDF. Quindi *se due angoli solidi* etc. C. B. D.

Scolio. Se due angoli solidi son composti di tre angoli piani respettivamente eguali, e se nel tempo stesso gli angoli eguali ed omologhi sono *disposti nella stessa maniera* nei due angoli solidi; allora questi angoli solidi saranno eguali, e posti l'uno sull' altro coincideranno. Infatti si è già veduto che il quadrilatero SAOC può esser situato sul suo eguale TDPF; così situando SA sopra TD, SC cade sopra TF, ed il punto O sul punto P. Ma, per l'eguaglianza dei triangoli AOB, DPE, la OB perpendicolare al piano ASC è eguale alla PE perpendicolare al piano TDF; di più queste perpendicolari sono dirette nel medesimo senso; dunque il punto B cadrà sul punto E, la linea SB sopra TE, ed i due angoli solidi coincideranno interamente l' uno sull' altro.

Questa coincidenza però non à luogo se non che supponendo che gli angoli piani eguali siano *disposti nella stessa maniera* nei due angoli solidi; poichè, se gli angoli piani eguali fossero *disposti in un ordine inverso*, il che torna lo stesso; se le perpendicolari OB, PE, in vece d' esser dirette nel medesimo senso per rapporto ai piani ASC, DTF, fossero dirette in sensi contrarî, allora sarebbe impossibile di far coincidere i due angoli solidi l'uno sull'altro. Non sarebbe però meno vero, conforme al teorema, che i piani nei quali sono gli angoli eguali fossero egualmente inclinati fra loro; talmente che i due angoli solidi sarebbero eguali in tutte le loro parti costituenti, senza però poter essere soprapposti. Questa specie d'eguaglianza, che non è assoluta o di soprapposizione, merita d'esser distinta con una denominazione particolare: noi la chiameremo *eguaglianza per simmetria*.

Così i due angoli solidi, dei quali trattasi, e che son formati da tre angoli piani respettivamente eguali, ma disposti in un ordine inverso, si chiameranno *angoli eguali per simmetria*, o semplicemente *angoli simmetrici*.

La medesima osservazione si applica agli angoli solidi formati da più di tre angoli piani: così un angolo solido formato dagli angoli piani A, B, C, D, E, ed un altro angolo solido formato dai medesimi angoli in un ordine inverso A, E, D, C, B possono essere tali che i piani nei quali sono gli angoli eguali siano egualmente inclinati fra loro. Questi due angoli solidi, che sarebbero eguali senza che fosse possibile la loro soprapposizione, si chiameranno *angoli solidi eguali per simmetria*, od *angoli solidi simmetrici*.

Nelle figure piane propriamente non vi è eguaglianza per simmetria, e tutte quelle che si volessero chiamar così sarebbero eguaglianze assolute o di soprapposizione: la ragione è questa, che si può capovolgere una figura piana e prendere indifferentemente la parte superiore per la inferiore. Accade diversamente nei solidi, ove la terza dimensione può esser presa in due sensi diversi.

PROPOSIZIONE XXIV.

PROBLEMA.

Essendo dati tre angoli piani che formano un angolo solido, trovare con una costruzione piana l'angolo che due di questi piani fanno fra loro.

Sia S (*fig. 198*) l'angolo solido proposto, nel quale si conoscano i tre angoli piani ASB, ASC, BSC; fa d'uopo trovare con una costruzione piana l'angolo che fanno fra loro due di questi piani, per esempio i piani ASB, ASC.

Fig. 198.

Prendasi SB a volontà, conducasi BO perpendicolare al piano ASC; dal punto O, ove questa perpendicolare incontra il piano, conducansi OA, OC perpendicolari ad SA, SC; congiungansi AB, BC; l'angolo OAB sarebbe l'angolo richiesto. Si tratta dunque di trovare il medesimo angolo con una costruzione piana o fatta sopra un piano.

A tale oggetto facciansi sopra un piano gli angoli B'SA, ASC, B''SC eguali agli angoli BSA, ASC, BSC della figura solida; prendansi B'S e B''S eguali ciascuna a BS della figura solida; dai punti B' e B'' abbassinsi B'A e B'' C perpendicolari sopra SA e SC che s' incontreranno in un punto O. Dal punto A come centro e col raggio AB' descrivasi la semicirconferenza B'*b*E; dal punto O alzisi sopra B'E la perpendicolare O*b* che incontri la circonferenza in *b*; tirisi A*b*; e l'angolo EA*b* sarà l'inclinazione cercata dei due piani ASC, ASB nell'angolo solido.

Tutto riducesi a far vedere che il triangolo AO*b* della figura piana è eguale al triangolo AOB della figura solida. Ora i due triangoli B'SA, BSA sono rettangoli in A e gli angoli in S sono eguali; dunque gli angoli in B e B' sono parimente eguali. Ma l'ipotenusa SB' è eguale all'ipotenusa SB; dunque questi triangoli sono eguali; dunque SA della figura piana è eguale ad SA della figura solida, ed anche AB', e la sua eguale A*b* nella figura piana è eguale ad AB nella figura solida. Si dimostrerà similmente che SC è eguale nelle due parti; d'onde ne segue che il quadrilatero SAOC è eguale in ambedue le figure, e che perciò AO della figura piana è eguale ad AO della figura solida; dunque nell'una e nell'altra i triangoli rettangoli AO*b*, AOB ànno l'ipotenusa eguale, ed un lato eguale; dunque

sono eguali, e l'angolo EAb trovato colla costruzione piana è eguale all'inclinazione dei due piani SAB, SAC dell'angolo solido.

Quando il punto O cade fra A e B' nella figura piana, l'angolo EAb diventa ottuso, e misura sempre la vera inclinazione dei piani; perciò l'inclinazione richiesta si è indicata con EAb, e non con OAb, affinchè la medesima soluzione convenga a tutti i casi senza eccezione. Quindi *essendo dati i tre angoli piani* etc. C. B. F.

Scolio. Si può domandare se, prendendo tre angoli piani a piacimento, si potrà formare con questi tre angoli piani un angolo solido.

Primieramente bisogna che la somma dei tre angoli dati sia minore di quattro angoli retti, altrimenti l'angolo solido non può esser formato (*Prop. 22*); bisogna di più che dopo aver preso due angoli a piacimento $B'SA$, ASC, il terzo CSB'' sia tale che la perpendicolare $B''C$ al lato SC incontri il diametro $B'E$ fra le sue estremità B' ed E. Così i limiti della grandezza dell' angolo CSB'' sono quelli che fanno terminar la perpendicolare $B''C$ ai punti B' ed E. Da questi punti abbassinsi sopra SC le perpendicolari $B'I$, EK, che incontrino in I e K la circonferenza descritta col raggio SB''; ed i limiti dell'angolo CSB'' saranno CSI e CSK.

Ma nel triangolo isoscele $B'SI$, la linea CS prolungata essendo perpendicolare alla base $B'I$, si à l' angolo $CSI = CSB' = ASC + ASB'$. E nel triangolo isoscele ESK, essendo la linea SC perpendicolare ad EK, si à l'angolo $CSK = CSE$. D' altronde per i triangoli eguali ASE, ASB', l' angolo $ASE = ASB'$: dunque CSE, ovvero $CSK = ASC - ASB'$.

Resulta da ciò che il problema sarà possibile ogni volta che il terzo angolo CSB'' sarà minore della somma degli altri due ASC, ASB', e maggiore della loro differenza; condizione che si accorda col teorema XXI; poichè, in virtù di un tal teorema, bisogna che si abbia $CSB'' < ASC + ASB'$; bisogna pure che sia $ASC < CSB'' + ASB'$, ossia $CSB'' > ASC - ASB'$.

PROPOSIZIONE XXV.

PROBLEMA.

Essendo dati due di tre angoli piani che formano un angolo solido, coll' angolo che i loro piani fanno tra loro, trovare il terzo angolo piano.

Siano ASC, ASB′ (*fig. 198*) i due angoli piani dati, e suppongasi che CSB″ sia il terzo angolo che si cerca; allora, facendo la medesima costruzione che nel problema precedente, l' angolo compreso tra' piani dei due primi sarebbe EA*b*. Ora nello stesso modo che si determina l' angolo EA*b* col mezzo di CSB″, essendo dati gli altri due, così si può determinare CSB″ col mezzo di EA*b*; il che risolverà il problema proposto. Fig. 198.

Avendo preso SB′ a piacimento, abbassisi sopra SA la perpendicolare indefinita B′E; facciasi l' angolo EA*b* eguale all' angolo dei due piani dati; dal punto *b*, ove il lato A*b* incontra la circonferenza descritta col centro A e col raggio AB′, abbassisi sopra AE la perpendicolare *b*O, e dal punto O abbassisi sopra SC la perpendicolare indefinita OCB″ che si terminerà in B″, di modo che SB″= SB′; l' angolo CSB″ sarà il terzo angolo piano cercato.

Infatti, se si formi un angolo solido coi tre angoli piani B′SA, ASC, CSB″, l' inclinazione dei piani, ove sono gli angoli dati ASB′, ASC, sarà eguale all' angolo dato EA*b*. Quindi *essendo dati due* etc. C. B. F.

Scolio. Se un angolo solido è *quadruplo* o formato da quattro angoli piani ASB, BSC, CSD, DSA (*fig. 199*) la conoscenza di questi angoli non basta per determinare le inclinazioni scambievoli dei loro piani; poichè coi medesimi angoli piani si potrebbero formare un' infinità di angoli solidi. Ma se si aggiunga una condizione, per esempio, se sia data l' inclinazione dei due piani ASB, BSC, allora l' angolo solido è interamente determinato, e si potrà trovare l' inclinazione di due qualunque dei suoi piani. Infatti immaginisi un angolo solido *triplo* formato dagli angoli piani ASB, BSC, ASC; i due primi angoli sono dati, come pure l' inclinazione dei loro piani; si potrà dunque determinare, mediante il problema che si è adesso risoluto, il terzo angolo ASC. Dipoi, se si consideri l' angolo solido triplo formato dagli angoli piani ASC, Fig. 199.

ASD, DSC, questi tre angoli sono cogniti; laonde l' angolo solido è interamente determinato. Ma l' angolo solido quadruplo è formato dalla unione dei due angoli solidi tripli dei quali è parola; dunque, poichè questi angoli parziali sono noti e determinati, l'angolo totale sarà parimente noto e determinato.

L'angolo dei due piani ASD, DSC si troverebbe immediatamente col mezzo del secondo angolo solido parziale. In quanto all' angolo dei due piani BSC, CSD bisognerebbe in un angolo solido parziale cercar l'angolo compreso fra i due piani ASC, DSC, e nell' altro l' angolo compreso fra i due piani ASC, BSC; la somma di questi due angoli formerebbe l'angolo compreso tra i due piani BSC, DSC.

Si troverà nella stessa maniera che, per determinare un angolo solido quintuplo, bisogna conoscere, oltre i cinque angoli piani che lo compongono, due inclinazioni scambievoli dei loro piani; ne bisognerebbero tre per l' angolo solido sestuplo; e così in seguito.

LIBRO SESTO.

I POLIEDRI

DEFINIZIONI.

I. Dicesi *solido poliedro*, o semplicemente *poliedro*, ogni solido terminato da piani o facce piane (Questi piani sono necessariamente terminati da linee rette).

Tetraedro dicesi in particolare il solido che à quattro facce piane.

Esaedro è quel solido che à sei facce piane.

Ottaedro è quel solido che à otto facce piane.

Dodecaedro è quel solido che à dodici facce piane.

Icosaedro è quel solido che à venti facce piane etc.(a).

Il tetraedro è il più semplice dei poliedri; infatti bisognano almeno tre piani per formare un angolo solido, e questi tre piani lasciano un vuoto che per essere chiuso abbisogna almeno un quarto piano.

II. Dicesi *lato* o *costola* di un poliedro l'intersezione comune di due facce adiacenti del poliedro.

III. Dicesi *poliedro regolare* quello le cui facce tutte sono poligoni regolari eguali, ed i cui angoli solidi tutti sono eguali fra loro. Questi poliedri sono in numero di cinque. (*Vedasi l' appendice ai libri VI e VII*).

IV. Il *prisma* è un solido compreso da molti piani parallelogrammi, terminati da una parte e dall' altra da due piani poligoni eguali e paralleli.

(a) Poliedro *da* πολύς (polys) molto . . .
Tetraedro *da* τετράς (tetras) quattro .
Esaedro *da* ἕξ (hex) sei . . . .
Ottaedro *da* ὀκτώ (octô) otto. . . . .
Dodecaedro *da* δώδεκα (dôdeca) dodici.
Icosaedro *da* εἴκοσι (eicosi) venti . . .
} *e da* ἕδρα (hedra) base.

(Il Trad.)

Fig. 200. Per costruire questo solido, sia ABCDE (*fig. 200*) un poligono qualunque: se in un piano parallelo ad ABC si tirino le linee FG, GH, HI, IK, KF eguali e parallele ai lati AB, BC, CD, DE, EA, ciò che formerà il poligono FGHIK eguale ad ABCDE; se in seguito si congiungano da un piano all'altro i vertici degli angoli omologhi con le rette AF, BG, CH, DI, EK, le facce ABGF, BGHC, HCDI, IDEK, KEAF saranno parallelogrammi, ed il solido così costruito ABCDEFGHIK sarà un prisma.

V. I poligoni eguali e paralleli ABCDE, FGHIK diconsi le *basi del prisma;* gli altri piani parallelogrammi presi insieme costituiscono la *superficie laterale* o *convessa del prisma*. Le rette eguali AF, BG, CH, DI, EK chiamansi *lati del prisma*.

VI. L'*altezza di un prisma* è la distanza delle due sue basi, o la perpendicolare abbassata da un punto della base superiore sopra il piano della base inferiore.

VII. Un *prisma* è *retto* quando i suoi lati AF, BG, CH, DI, EK sono perpendicolari ai piani delle basi; allora ciascuno di essi è eguale all'altezza del prisma. In qualunque altro caso il prisma è *obliquo* e l'altezza è minore del lato.

VIII. Un *prisma* è *triangolare, quadrangolare, pentagonale, esagonale etc.* secondo che la base è un triangolo, un quadrilatero, un pentagono, un esagono, etc.

IX. Il prisma che à per base un parallelogrammo à tutte le sue facce parallelogrammiche, si chiama *parallelepipedo* (*a*) (*fig. 206*). Fig. 206.

Il *parallelepipedo* è *rettangolo* allorchè tutte le sue facce sono rettangoli.

X. Fra i parallelepipedi rettangoli si distingue il *cubo* o esaedro regolare compreso da sei quadrati eguali.

XI. La *piramide* (*b*) è il solido formato allorchè molti piani triangolari partono da un punto S (*fig. 196*) e sono terminati ai differenti lati di un medesimo piano poligono ABCDE. Fig. 196.

(a) Parallelepipedo *da* παρὰ (para) presso, *da* ἀλλήλων (allilòn) degli uni e degli altri, *da* ἐπὶ (epi) sopra, *e da* πόυς (pùs) piede. (Il Trad.).

(b) Piramide *da* πῦρ (pyr) fuoco, *forse perchè la fiamma non agitata prende la forma di questo solido:* o da πυρός (pyros) frumento, *forse perchè il frumento accumulato e lasciato libero pure si conforma a foggia piramidale.*

Il poligono ABCDE si chiama la *base* della piramide, il punto S dicesi il *vertice*, ed il complesso dei triangoli ASB, BSC, CSD, DSE, ESA forma la *superficie convessa* o *laterale* della piramide.

XII. L'*altezza* della piramide è la perpendicolare abbassata dal vertice sopra il piano della base, prolungato se è necessario.

XIII. La *piramide* è *triangolare*, *quadrangolare*, etc. secondo che la base è un triangolo, un quadrilatero, etc.

XIV. Una piramide è *regolare*, allorchè la base è un poligono regolare, e che nello stesso tempo la perpendicolare abbassata dal vertice sopra il piano della base passa pel centro di questa base; questa linea allora chiamasi l' *asse* della piramide.

XV. *Diagonale di un poliedro* è la retta che congiunge i vertici di due angoli solidi non adiacenti.

XVI. Diconsi *poliedri simmetrici* due poliedri che, avendo una base comune, sono costruiti similmente, uno al di sopra del piano di questa base, l' altro al di sotto, con questa condizione, che i vertici degli angoli solidi omologhi siano situati ad egual distanza dal piano della base, sopra una medesima perpendicolare a questo piano.

Per esempio se la retta ST (*fig.202*) è perpendicolare al piano ABC, e che al punto O ove essa incontra questo piano, sia divisa in due parti eguali, le due piramidi SABC, TABC che ànno la base comune ABC, saranno due poliedri simmetrici. Fig.202.

XVII. Due *piramidi triangolari* sono *simili* allorchè ànno due facce simili rispettivamente, similmente disposte ed egualmente inclinate fra loro.

Così supponendo gli angoli ABC = DEF (*fig. 203*), BAC = EDF, ABS = DET, BAS = EDT; se inoltre l'inclinazione dei piani ABS, ABC è eguale a quella dei loro omologhi DET, DEF, le piramidi SABC, TDEF saranno simili. Fig.203.

XVIII. Avendo formato un triangolo unendo i vertici di tre angoli presi sopra una medesima faccia o base di un poliedro, si può immaginare che i vertici dei differenti angoli solidi del poliedro, situati fuori del piano di questa base, sieno quelli di altrettante piramidi triangolari che ànno per base comune il triangolo indicato; e ciascuna di queste piramidi determinerà la posizione di ciascuno angolo solido del poliedro per rapporto alla base. Ciò posto:

Due *poliedri* sono *simili* allorchè avendo basi simili i vertici degli angoli solidi omologhi, fuori di queste basi, sono determinati da piramidi triangolari respettivamente simili.

XIX. Diconsi *vertici di un poliedro* i punti situati ai vertici dei suoi differenti angoli solidi.

N. B. Tutti i poliedri, che si considerano, sono poliedri ad angoli salienti o *poliedri convessi*. Chiamiamo così quelli la cui superficie non può essere incontrata da una linea retta in più di due punti. In questa specie di poliedri il piano prolungato di una faccia non può tagliare il solido; è dunque impossibile che il poliedro sia in parte al di sopra del piano di una faccia ed in parte al di sotto; esso è tutto intero da una medesima parte di un tal piano.

PROPOSIZIONE PRIMA.

TEOREMA.

Due poliedri non possono avere i medesimi vertici e nel medesimo numero senza coincidere l'uno con l'altro.

Infatti suppongasi uno dei poliedri già costruito, se si vuole costruirne un altro che abbia i medesimi vertici e nello stesso numero, bisognerà che i piani di questo ultimo non passino tutti pei medesimi punti che nel primo, altrimenti non differirebbero l'uno dall' altro; ma allora è chiaro che alcuno dei nuovi piani taglierebbero il primo poliedro; vi sarebbero dei vertici al di sopra di questi piani e dei vertici al di sotto, ciò che non può convenire ad un poliedro convesso; dunque, se due poliedri ànno i medesimi vertici e nel medesimo numero, essi debbono necessariamente coincidere l' uno con l' altro. Quindi *due poliedri* etc. C. B. D.

Scolio. Essendo dati di posizione i punti A, B, C, K Fig. 204. etc., (*fig. 204*) che debbono essere i vertici di un poliedro, egli è facile descrivere il poliedro.

Scelgansi primieramente tre punti vicini D, E, H tali che il piano DEH passi, se ciò à luogo, per altri punti come K, C, ma lasci tutti gli altri da una medesima parte, cioè tutti al di sopra del piano o tutti al di sotto; il piano DEH o CEHKC, così determinato, sarà una faccia del solido. Per uno dei suoi lati EH conducasi un piano che si fa girare finchè incontri un nuovo vertice F o più

insieme F, I; si avrà una seconda faccia che sarà FEH o FEHI. Continuisi così facendo passare piani pei lati trovati finchè il solido sia terminato da tutte le parti; questo solido sarà il poliedro domandato, perchè non ve ne sono due che possano passare pei medesimi vertici.

PROPOSIZIONE II.

TEOREMA.

In due poliedri simmetrici le facce omologhe sono respettivamente eguali, e l' inclinazione di due facce adiacenti in uno di questi solidi è eguale all' inclinazione delle facce omologhe nell' altro.

Sia ABCDE (*fig.* 205) la base comune ai due poliedri, siano M ed N i vertici di due angoli solidi qualunque di uno dei poliedri, M′ ed N′ i vertici omologhi dell' altro poliedro; bisognerà, per la definizione, che le rette MM′, NN′ siano perpendicolari al piano ABC, e che esse siano divise in due parti eguali ai punti *m* ed *n*, ove incontrano questo piano. Ciò posto, dico che la distanza MN è eguale ad M′N′. Fig. 205.

Infatti, se si fa girare il trapezio *m*M′N′*n* intorno ad *mn*, finchè il suo piano si applichi al piano *m*MN*n*, a cagione degli angoli retti in *m* ed in *n*, il lato *m*M′ cadrà sopra il suo eguale *m*M, ed *n*N′ sopra *n*N; dunque i due trapezî coincideranno, e si avrà MN = M′N′.

Sia P un terzo vertice del poliedro superiore, e P′ il suo omologo nell' altro; si avrà ancora MP = M′P′, ed NP = N′P′; dunque il *triangolo* MNP *che congiunge tre vertici qualunque del poliedro superiore è eguale al triangolo* M′N′P′ *che unisce i tre vertici omologhi dell' altro poliedro.*

Se considerinsi soltanto tra questi triangoli quelli che sono formati alla superficie dei poliedri, si può conchiudere che le superficie dei due poliedri sono composte di un medesimo numero di triangoli eguali respettivamente.

Dico ora che se alcuni di questi triangoli sono in un medesimo piano sopra una superficie e formano una medesima faccia poligona, i triangoli omologhi saranno in un medesimo piano sopra l' altra superficie e formeranno una faccia poligona eguale.

Infatti siano MPN, NPQ due triangoli adiacenti che si suppongono in uno stesso piano, e siano M′P′N′, N′P′Q′

i loro omologhi. Si à l' angolo MNP = M'N'P, l' angolo PNQ=P'N'Q'; e se si congiungano MQ ed M'Q', il triangolo MNQ sarebbe eguale ad M'N'Q'; così si avrebbe l'angolo MNQ = M'N'Q'. Ma poichè MPNQ è un sol piano, si à l' angolo MNQ = MNP + PNQ; dunque si avrà pure M'N'Q'= M'N'P' + P'N'Q'. Ora, se i tre piani M'N'P', P'N'Q', M'N'Q' non fossero in un sol piano, questi due piani formerebbero un angolo solido, e si avrebbe (*Prop. 21, lib. V*) l' angolo M'N'Q' < M'N'P' + P'N'Q'; dunque, poichè questa condizione non à luogo, i due triangoli M'N'P', P'N'Q' sono in un medesimo piano.

Deriva da ciò che ciascuna faccia, sia triangolare, sia poligona, in un poliedro, corrisponde ad una faccia eguale nell' altro, e che perciò i due poliedri sono compresi da un medesimo numero di piani respettivamente eguali.

Rimane a provare che l'inclinazione di due facce adiacenti qualunque in uno dei poliedri è eguale all' inclinazione delle due facce omologhe nell' altro.

Siano MPN, NPQ due triangoli formati sulla costola comune NP nei piani di due facce adiacenti; siano M'P'N', N'P'Q' i loro omologhi; si può concepire in N un angolo solido formato dai tre angoli piani MNQ, MNP, PNQ, ed in N' un angolo solido formato dai tre M'N'Q', M'N'P', P'N'Q'. Ora abbiamo già provato che questi angoli piani sono respettivamente eguali; dunque l' inclinazione dei due piani MNP, PNQ è eguale a quella dei loro omologhi M'N'P', P'N'Q' (*Prop. 23, lib. V*).

Dunque *nei poliedri simmetrici le facce sono eguali respettivamente, ed i piani di due facce qualunque adiacenti in uno dei solidi ànno fra loro la medesima inclinazione che i piani di due facce omologhe nell' altro solido*. C.B.D.

Scolio. Si può osservare che *gli angoli solidi di un poliedro sono i simmetrici degli angoli solidi dell' altro poliedro*; infatti se l'angolo solido N è formato dai piani MNP, PNQ, QNR, etc., il suo omologo N' è formato dai piani M'N'P', P'N'Q', Q'N'R', etc. Questi sembrano disposti nello stesso ordine degli altri; ma come i due angoli solidi sono in una situazione inversa l' uno per rapporto all'altro, ne segue che la disposizione reale dei piani che formano l' angolo solido N' è l' inversa di quella che à luogo nell' angolo omologo N. D' altronde le inclinazioni dei piani consecutivi sono eguali nell'uno e nell'altro angolo solido; dunque questi angoli solidi sono simmetrici

l' uno all' altro. (*Vedasi lo scolio della proposizione 23, lib. V*).

Questa osservazione prova che *un poliedro qualunque non può avere che un solo poliedro simmetrico.* Poichè se si costruisse sopra un' altra base un novello poliedro simmetrico al poliedro dato, gli angoli solidi di questo sarebbero sempre simmetrici agli angoli del poliedro dato ; dunque sarebbero eguali a quelli del poliedro simmetrico costruito sulla prima base. D' altronde le facce omologhe sarebbero sempre eguali ; dunque questi due poliedri simmetrici costrutti sopra una base o sopra un'altra avrebbero le facce eguali e gli angoli solidi eguali; essi dunque coinciderebbero mediante la soprapposizione e non formerebbero che un solo e medesimo poliedro.

PROPOSIZIONE III.

TEOREMA.

Due prismi sono eguali allorchè ànno un angolo solido compreso fra tre piani respettivamente eguali e similmente disposti.

Sia la base ABCDE (*fig.* 200) eguale alla base *abcde*, Fig. 200. il parallelogrammo ABGF eguale al parallelogrammo *abgf*, ed il parallelogrammo BCHG eguale al parallelogrammo *bchg* ; dico che il prisma ABCI sarà eguale al prisma *abci*.

Infatti situisi la base ABCDE sulla sua eguale *abcde*, queste due basi coincideranno; ma i tre angoli piani che formano l' angolo solido B sono eguali respettivamente ai tre angoli piani che formano l' angolo solido *b*, cioè, ABC = *abc* , ABG = *abg* , e GBC = *gbc*; di più questi angoli sono similmente disposti ; dunque gli angoli solidi B e *b* sono eguali , e per conseguenza il lato BG cadrà sul suo eguale *bg*. Si vede pure che, per i parallelogrammi eguali ABGF , *abgf*, il lato GF cadrà sul suo eguale *gf* , e similmente GH sopra *gh* ; dunque la base superiore FGHIK coinciderà interamente sulla sua eguale *fghik*, ed i due solidi ne faranno un solo, poichè avranno i medesimi vertici (*Prop. 1*). Quindi *due prismi sono eguali* etc. C. B. D.

Corollario. Due prismi retti che ànno le basi eguali e le altezze eguali sono eguali. Infatti avendo il lato AB egua-

le ad ab, e l'altezza BG eguale a bg, il rettangolo ABGF sarà eguale al rettangolo $abgf$; sarà lo stesso del rettangolo BGHC, $bghc$; così i tre piani che formano l'angolo solido B sono eguali ai tre piani che formano l'angolo solido b. Dunque i due prismi sono eguali.

PROPOSIZIONE IV.

TEOREMA.

In ogni parallelepipedo i piani opposti sono eguali e paralleli.

Fig. 206. Sia il parallelepipedo ABCDEFGH (*fig.* 206); dico che i piani opposti sono eguali e paralleli.

Secondo la definizione di questo solido, le basi ABCD, EFGH sono parallelogrammi eguali, ed i loro lati sono paralleli; resta a dimostrare che la medesima cosa à luogo per due facce laterali opposte, come AEHD, BFGC.

Ora AD è eguale e parallela a BC, poichè la figura ABCD è un parallelogrammo; per la stessa ragione AE è eguale e parallela a BF; dunque l'angolo DAE è eguale all'angolo CBF (*Prop. 13, lib. V*), ed il piano DAE parallelo a CBF; dunque anche il parallelogrammo DAEH è eguale al parallelogrammo CBFG. Si dimostrerà similmente che i parallelogrammi opposti ABFE, DCGH sono eguali e paralleli. Dunque *in ogni parallelepipedo* etc. C. B. D.

Corollario. Poichè il parallelepipedo è un solido compreso da sei piani, dei quali gli opposti sono eguali e paralleli, ne segue che una faccia qualunque e la sua opposta possono essere prese per le basi del parallelepipedo.

Scolio. Essendo date tre rette AB, AE, AD che passino per un medesimo punto A e facendo fra loro angoli dati, si può su queste tre rette costruire un parallelepipedo; bisogna per ciò condurre per l'estremità di ciascuna retta un piano parallelo al piano delle altre due; vale a dire pel punto B un piano parallelo al piano DAE, per il punto D un piano parallelo al piano BAE, e per il punto E un piano parallelo al piano BAD. Gli scambievoli incontri di questi piani formeranno il parallelepipedo richiesto.

PROPOSIZIONE V.

TEOREMA.

In ogni parallelepipedo gli angoli solidi opposti sono simmetrici l'uno all' altro, e le diagonali condotte dai vertici di questi angoli si tagliano scambievolmente in due parti eguali.

Sia il parallelepipedo ABCDEFGH (*fig. 206*) ; I.° dico che gli angoli solidi opposti di questo parallelepipedo sono simmetrici l' uno all' altro. Fig. 206.

Paragonisi, per esempio, l' angolo solido A col suo opposto G ; l' angolo EAB eguale ad EFB è pure eguale ad HGC, l' angolo DAE = DHE = CGF , e l' angolo DAB = DCB = HGF ; dunque i tre angoli piani che formano l'angolo solido A sono eguali respettivamente ai tre angoli piani che formano l' angolo solido G ; d' altronde è facile vedere che la loro disposizione è differente nell' uno e nell' altro ; dunque 1.° i due angoli solidi A e G sono simmetrici l' uno all' altro (*Scolio Prop. 23 , lib. V*).

II.° Dico in secondo luogo che le diagonali condotte dai vertici degli angoli solidi opposti si tagliano scambievolmente in due parti eguali.

Immagininsi due diagonali EC, AG condotte l' una e l' altra da vertici opposti ; poichè AE è eguale e parallela a CG, la figura AEGC è un parallelogrammo ; dunque le diagonali EC, AG si taglieranno scambievolmente in due parti eguali. Si dimostrerà similmente che la diagonale EC ed un' altra DF si taglierebbero ancora in due parti eguali ; dunque 2.° le quattro diagonali si taglieranno scambievolmente in due parti eguali in uno stesso punto, che può riguardarsi come il centro del parallelepipedo.

Quindi *in ogni parallelepipedo* etc. C. B. D.

PROPOSIZIONE VI.

TEOREMA.

Il piano che passa per due costole parallele opposte di un parallelepipedo divide il parallelepipedo in due prismi triangolari simmetrici l' uno all' altro.

Fig. 207. Sia il piano BDHF (*fig. 207*) che passa per le due costole opposte parallele BF, DH del parallelepipedo AG; dico che questo parallelepipedo è diviso in due prismi triangolari ABDHEF, GHFBCD simmetrici l' uno all' altro.

Primieramente questi due solidi sono prismi, giacchè i triangoli ABD, EFH avendo i loro lati eguali e paralleli, sono eguali, e nello stesso tempo le facce laterali ABFE, ADHE, BDHF sono parallelogrammi; dunque il solido ABDHEF è un prisma; lo stesso è del solido GHFBCD.

Dico ora che questi due prismi sono simmetrici l'uno all' altro.

Sopra la base ABD facciasi il prisma ABDE'F'H' che sia simmetrico al prisma ABDEFH. Secondo ciò che si è dimostrato (*Prop. 2*) il piano ABF'E' è eguale ad ABFE, ed il piano ADH'E' è eguale al piano ADHE; ma, se si paragona il prisma GHFBCD al prisma ABDH'E'F', la base GHF è eguale ad ABD; il parallelogrammo GHDC che è eguale ad ABFE è ancora eguale ad ABF'E', ed il parallelogrammo GFBC che è eguale ad ADHE è ancora eguale ad ADH'E'; dunque i tre piani che formano l'angolo solido G nel prisma GHFBCD sono eguali respettivamente ai tre piani che formano l'angolo solido A nel prisma ABDH'E'F', d' altronde sono disposti similmente; dunque questi due prismi sono eguali (*Prop. 3*), e potrebbero essere soprapposti. Ma uno di essi ABDH'E'F' è simmetrico al prisma ABDHEF; dunque l' altro GHFBCD è pure simmetrico ad ABDHEF. Quindi *il piano che passa* etc. C. B. D.

PROPOSIZIONE VII.

LEMMA.

In qualunque prisma ABCI (fig. 201), *le sezioni* NOPQR, STVXY *fatti da' piani paralleli sono poligoni eguali.* Fig. 201.

Infatti i lati NO,ST sono paralleli, essendo le intersezioni di due piani paralleli con un terzo piano ABGF; questi medesimi lati NO,ST sono compresi fra le parallele NS, OT che sono i lati del prisma; dunque NO è eguale ad ST. Per una simile ragione i lati PO, PQ, QR etc. della sezione NOPQR sono respettivamente eguali ai lati TV, VX, XY etc. della sezione STVXY. D'altronde i lati eguali essendo nel medesimo tempo paralleli, ne segue che gli angoli NOP, OPQ della prima sezione, sono eguali respettivamente agli angoli STV, TVX etc. della seconda. Dunque *le due sezioni* NOPQR, STVXY, *sono poligoni eguali.*

Corollario. Ogni sezione fatta in un prisma parallelamente alla sua base è eguale a questa base.

PROPOSIZIONE VIII.

TEOREMA.

I due prismi triangolari simmetrici nei quali si decompone un parallelepipedo sono equivalenti fra loro.

Siano i due prismi triangolari simmetrici ABDEHF, BCDHGF (*fig.* 208) nei quali si decompone il parallelepipedo AG; dico che saranno equivalenti fra loro. Fig. 208.

Per i vertici B ed F conducansi perpendicolarmente al lato BF i piani B*adc*, F*ehg* che incontreranno da una parte in *a*, *d*, *c*, e dall'altra in *e*, *h*, *g* i tre altri lati AE, DH, CG del medesimo parallelepipedo; le sezioni B*adc*, F*ehg* saranno parallelogrammi eguali. Queste sezioni sono eguali, poichè sono fatte da piani perpendicolari ad una stessa retta, e per conseguenza paralleli (*Prop.* 7); esse sono parallelogrammi, poichè due lati opposti di una medesima sezione *a*B, *dc* sono le intersezioni di due piani paralleli ABFE, DCGH da un medesimo piano.

Per una ragione simile la figura B*ae*F è un parallelogrammo, come pure le altre facce laterali BF*gc*, *cdhg*,

adhe del solido B*adcFehg* : dunque questo solido è un prisma (*Def. 4*), e questo prisma è retto , poichè il lato BF è perpendicolare al piano della base.

Ciò posto, se pel piano BFHD si divida il prisma retto B*h* in due prismi triangolari retti *a*B*deFh*, B*dcFhg*; dico che il prisma triangolare obliquo ABDEFH sarà equivalente al prisma triangolare retto *a*B*deFh*.

Infatti questi due prismi avendo una parte comune ABD*he*F, basterà dimostrare che le rimanenti parti, cioè i solidi B*a*AD*d* , F*e*EH*h* sono equivalenti fra loro.

Ora, per i parallelogrammi ABFE, *a*BF*e*, i lati AE, *ae* eguali al loro parallelo BF sono eguali fra loro ; così togliendone la parte comune A*e*, resterà A*a* = E*e*. Similmente si dimostrerebbe D*d* = H*h*.

Ora per operare la soprapposizione dei due solidi B*a*AD*d*, F*e*EH*h*, situisi la base F*eh* sulla sua eguale B*ad*, allora il punto *e* cadendo in *a* ed il punto *h* in *d*, i lati *e*E, H*h* cadranno sopra i loro eguali *a*A , *d*D , poichè sono perpendicolari al medesimo piano B*ad*. Dunque i due solidi dei quali trattasi coincideranno interamente l'uno coll'altro ; dunque il prisma obliquo BADEFH è equivalente al prisma retto B*ad*F*eh*.

Si dimostrerà similmente che il prisma obliquo BDCFHG è equivalente al prisma retto B*dc*F*hg*. Ma i due prismi retti B*ad*F*eh*, B*dc*F*hg* sono eguali fra loro, poichè ànno la medesima altezza BF, e le loro basi B*ad*, B*dc* sono metà di un medesimo parallelogrammo (*Corol. Prop. 3*). Dunque i due prismi triangolari BADFEH, BDCFHG equivalenti a prismi eguali sono equivalenti fra loro. Dunque *i due prismi triangolari* etc. C. B. D.

Corollario. Ogni prisma triangolare ABDEHF è la metà del parallelepipedo AG, costrutto sul medesimo angolo solido A con le medesime costole AB, AD, AE.

PROPOSIZIONE IX.

TEOREMA.

Se due parallelepipedi ànno la base comune, e che le loro basi superiori sono comprese in un medesimo piano e tra le medesime parallele, questi due parallelepipedi saranno equivalenti fra loro.

Siano i due parallelepipedi AG, AL (*fig. 209*) che ànno la base comune ABCD, e che le loro basi superiori EFGH, IKLM sono comprese in un medesimo piano, e fra le stesse parallele EK, HL; dico questi parallelepipedi saranno equivalenti fra loro.

Fig. 209.

Possono accadere tre casi, secondo che EI è maggiore, minore od eguale ad EF; ma la dimostrazione è la stessa per tutti; ed in primo luogo dico che il prisma triangolare AEIDHM è eguale al prisma triangolare BFKCGL.

Infatti, poichè AE è parallela a BF, ed HE a GF, l'angolo AEI = BFK, HEI = GFK, ed HEA = GFB; di questi sei angoli i primi tre formano l'angolo solido E, e gli altri tre formano l'angolo solido F; dunque poichè gli angoli piani sono eguali respettivamente e similmente disposti, ne segue che gli angoli solidi E ed F sono eguali. Ora se pongasi il prisma AEM sul prisma BFL, e primieramente la base AEI sulla base BFK, queste due basi essendo eguali coincideranno; e poichè l'angolo solido E è eguale all'angolo solido F, il lato EH cadrà sul suo eguale FG: non bisogna altro per dimostrare che i due prismi coincideranno in tutta la loro estensione; perchè la base AEI e la costola EH determinano il prisma AEM, come la base BFK e la costola FG determinano il prisma BFL (*Prop. 3*); dunque questi prismi sono eguali.

Ma se dal solido AL si tolga il prisma AEM, resterà il parallelepipedo AIL; se dallo stesso solido AL si tolga il prisma BFL resterà il parallelepipedo AEG; dunque i due parallelepipedi AIL, AEG sono equivalenti fra loro. (*Assioma 7*). Dunque *se due parallelepipedi* etc. C.B.D.

PROPOSIZIONE X.

TEOREMA.

Due parallelepipedi della medesima base e della medesima altezza sono equivalenti fra loro.

Fig. 210. Siano i due parallelepipedi AG, AL (*fig. 210*) che ànno la medesima base ABCD e la medesima altezza; dico che sono equivalenti.

Avendo la medesima altezza, le loro basi superiori EFGH, IKLM saranno sopra un medesimo piano. Dippiù i lati EF, AB sono eguali e paralleli, come pure IK ed AB; dunque EF è eguale e parallela ad IK; per una simile ragione GF è eguale e parallela ad LK. Siano prolungati i lati EF, HG, come pure LK, IM, finchè gli uni e gli altri formino colle loro intersezioni il parallelogrammo NOPQ; è chiaro che questo parallelogrammo sarà eguale a ciascuna delle basi EFGH, IKLM. Ora se s' immagini un terzo parallelepipedo che, colla medesima base inferiore ABCD, abbia per base superiore NOPQ, questo terzo parallelepipedo sarà equivalente al parallelepipedo AG (*Prop. 9*), poichè avendo una medesima base inferiore, le basi superiori sono comprese in un medesimo piano, e fra le parallele GQ, FN. Per la medesima ragione questo terzo parallelepipedo sarebbe equivalente al parallelepipedo AL. Dunque *i due parallelepipedi AG, AL che ànno la medesima base e la medesima altezza sono equivalenti fra loro.* C. B. D.

PROPOSIZIONE XI.

TEOREMA.

Ogni parallelepipedo può essere cangiato in un parallelepipedo rettangolo equivalente che avrà la medesima altezza ed una base equivalente.

Fig. 210. Sia AG il parallelepipedo proposto (*fig. 210*); dico che si può cangiare in un parallelepipedo rettangolo equivalente della medesima altezza e di base equivalente.

Dai punti A, B, C, D conducansi AI, BK, CL, DM perpendicolari al piano della base; si formerà così il parallelepipedo AL

equivalente al parallelepipedo AG, le cui facce laterali AK, BL, etc. saranno rettangoli. Se dunque la base ABCD è un rettangolo, AL sarà il parallelepipedo rettangolo equivalente al parallelepipedo proposto AG. Ma, se ABCD (*fig.* Fig. 211. *211*) non è un rettangolo, conducansi AO e BN perpendicolari sopra CD, dipoi OQ ed NP perpendicolari sopra la base; si avrà il solido ABNOIKPQ che sarà un parallelepipedo rettangolo : infatti, per costruzione, la base ABNO e la sua opposta IKPQ sono rettangoli ; le facce laterali sono pur tali, poichè le costole AI, OQ, etc. son perpendicolari al piano della base; dunque il solido AP è un parallelepipedo rettangolo. Ma i due parallelepipedi AP, AL possono considerarsi come costrutti sulla medesima base ABKI, ed avere la medesima altezza AO; dunque essi sono equivalenti; dunque il parallelepipedo AG (*fig.* *210* e *211*) che Fig. 210, 211. era stato cangiato in un parallelepipedo equivalente AL, si trova di nuovo cangiato in un parallelepipedo rettangolo equivalente AP che à la medesima altezza AI, e la cui base ABNO è equivalente alla base ABCD. Quindi *ogni parallelepipedo può èssere* etc. C. B. D.

PROPOSIZIONE XII.

TEOREMA.

Due parallelepipedi rettangoli che ànno la medesima base, sono fra loro come le altezze.

Siano i due parallelepipedi rettangoli AG, AL (*fig.* Fig. 212. *212*) che ànno la medesima base ABCD ; dico che stanno fra loro come le loro altezze AE, AI.

Suppongasi primieramente che le altezze AE, AI siano fra loro come due numeri interi, per esempio, come 15 sta ad 8. Si dividerà AE in 15 parti eguali, delle quali AI ne conterrà 8, e per i punti di divisione x, y, z, etc., si condurranno piani paralleli alla base. Questi piani divideranno il solido AG in 15 parallelepipedi parziali che saranno tutti eguali fra loro, come aventi basi eguali ed altezze eguali ; basi eguali , perchè ogni sezione come MIKL fatta in un prisma parallelamente alla base ABCD è eguale a questa base (*Prop.7*); altezze eguali, perchè queste altezze sono le divisioni stesse Ax, xy , yz, etc. Ora di questi 15 parallelepipedi eguali, otto sono contenuti

in AL; dunque il solido AG sta al solido AL come 15 sta ad 8, od in generale come l' altezza AE sta all' altezza AI.

In secondo luogo, se il rapporto di AE ed AI non può esprimersi in numeri; dico che non ostante si avrà

solid. AG : *solid*. AL :: AE : AI.

Infatti, se questa proporzione non à luogo, suppongasi che si abbia

solid. AG : *solid*. AL :: AE : AO.

Dividasi AE in parti eguali, delle quali ciascuna sia minore di OI; vi sarà almeno un punto di divisione *m* fra O ed I. Sia P il parallelepipedo che à per base ABCD e per altezza A*m*; poichè le altezze AE, A*m* sono fra loro come due numeri interi, si avrà

solid. AG : P :: AE : A*m*.

Ma si à per ipotesi

solid. AG : *solid*. AL :: AE : AO;

da ciò resulta

solid. AL : P :: AO : A*m*.

Ma AO è maggiore di A*m*; dunque bisognerebbe, perchè la proporzione avesse luogo, che il solido AL fosse maggiore di P. Ora al contrario è minore; dunque è impossibile che il quarto termine della proporzione

solid. AG : *solid*. AL :: AE : x,

sia una linea maggiore di AI. Con un ragionamento simile si dimostrerebbe che il quarto termine non può essere minore di AI; dunque è eguale ad AI. Dunque *i parallelepipedi rettangoli della medesima base stanno fra loro come le loro altezze*. C. B. D.

PROPOSIZIONE XIII.

TEOREMA.

Due parallelepipedi rettangoli che ànno la medesima altezza stanno fra loro come le basi.

Siano i due parallelepipedi AG, AK (*fig. 213*) che ànno la medesima altezza AE; dico che questi parallelepipedi stanno fra loro come le basi ABCD, AMNO. Fig. 190.

Disposti i due solidi l' uno accanto l' altro come li rappresenta la figura, prolunghisi il piano ONKL finchè incontri il piano DCGH secondo PQ, si avrà un terzo parallelepipedo AQ che potrà paragonarsi a ciascuno dei parallelepipedi AG, AK. I due solidi AG, AQ, avendo la medesima base AEHD, stanno fra loro come le respettive altezze AB, AO; similmente i due solidi AQ, AK, avendo la medesima base AOLE, stanno fra loro come le altezze AD, AM. Si avranno così le due proporzioni,

$$\textit{solid.}\ AG : \textit{solid.}\ AQ :: AB : AO,$$
$$\textit{solid.}\ AQ : \textit{solid.}\ AK :: AD : AM.$$

Moltiplicando queste due proporzioni per ordine, si avrà

$$\textit{sol.}\ AG \times \textit{sol.}\ AQ : \textit{sol.}\ AQ \times \textit{sol.}\ AK :: AB \times AD : AO \times AM,$$

ed omettendo in questo resultato il moltiplicatore comune *sol.* AQ, si avrà

$$\textit{sol.}\ AG : \textit{sol.}\ AK :: AB \times AD : AO \times AM.$$

Ma AB × AD rappresenta la base ABCD, ed AO × AM rappresenta la base AMNO; dunque *due parallelepipedi rettangoli che ànno la medesima altezza stanno fra loro come le basi.* C. B. D.

PROPOSIZIONE XIV.

TEOREMA.

Due parallelepipedi rettangoli qualunque stanno fra loro come i prodotti delle loro basi per le loro altezze, o come i prodotti delle loro tre dimensioni.

Fig. 213. Siano i parallelepipedi AG, AZ (*fig. 213*) rettangoli; dico che stanno fra loro come i prodotti delle loro basi ABCD, AMNO per le loro altezze AE, AX, o come i prodotti delle loro tre dimensioni, AB, AD, AE ed AO, AM, AX.

Infatti, situati i due solidi AG, AZ in modo che le loro superficie abbiano l'angolo comune BAE, prolunghinsi i piani che necessitano per formare il terzo parallelepipedo AK della medesima altezza del parallelepipedo AG. Si avrà per la proposizione precedente,

sol. AG : *sol.* AK :: ABCD : AMNO.

Ma i due parallelepipedi AK, AZ che ànno la medesima base AMNO, stanno fra loro come le altezze AE, AX; onde si avrà

sol. AK : *sol.* AZ :: AE : AX.

Moltiplicando queste due proporzioni per ordine, si avrà

*sol.*AG × *sol.*AK : *sol.*AZ × *sol.*AK :: ABCD × AE : AMNO × AX

ed omettendo nel resultato il moltiplicatore comune *sol.* AK, si avrà

sol. AG : *sol.* AZ :: ABCD × AE : AMNO × AX.

Invece delle basi ABCD ed AMNO si può mettere AB × AD ed AO × AM, il che darà
sol. AG : *sol.* AZ :: AB × AD × AE : AO × AM × AX.

Dunque *due parallelepipedi rettangoli qualunque stanno fra loro* etc. C. B. D.

Scolio. Da ciò segue che si può prendere per misura d'un parallelepipedo rettangolo il prodotto della sua base per la sua altezza, od il prodotto delle sue tre dimensioni. Su questo principio valuteremo tutti gli altri solidi.

Per l' intelligenza di questa misura bisogna rammentarsi che s' intende per prodotto di due o di più linee il prodotto dei numeri, che rappresentano tali linee; e questi numeri dipendono dall' unità lineare che si può prendere a piacimento: posto ciò il prodotto delle tre dimensioni d'un parallelepipedo è un numero che non significa niente in sè stesso, e che sarebbe differente se si fosse preso un' altra unità lineare. Ma, se si moltiplichino parimente le tre dimensioni d'un altro parallelepipedo, valutandole sulla medesima unità lineare, i due prodotti staran fra loro come i solidi, e daranno l' idea della loro grandezza relativa.

La grandezza d' un solido, il suo volume o la sua estensione costituiscono ciò che si chiama la sua *solidità;* e la parola *solidità* è impiegata particolarmente per designare la misura d'un solido: così si dice che la solidità d'un parallelepipedo rettangolo è eguale al prodotto della sua base per la sua altezza, od al prodotto delle sue tre dimensioni.

Essendo le tre dimensioni del cubo eguali fra loro, se il lato è 1, la solidità sarà $1\times1\times1$, ossia 1; se il lato è 2, la solidità sarà $2\times2\times2$, ovvero 8; se il lato è 3, la solidità sarà $3\times3\times3$, ossia 27, e così in seguito: perciò, essendo i lati dei cubi come i numeri 1, 2, 3, etc. i cubi stessi o le loro solidità sono come i numeri 1, 8, 27, etc. Quindi è che in aritmetica si chiama *cubo* d'un numero il prodotto che risulta da tre fattori eguali a questo numero.

Se si proponesse di fare un cubo doppio d' un cubo dato, bisognerebbe che il lato del cubo cercato fosse al lato del cubo dato, come la radice cubica di 2 è all' unità. Ora si trova facilmente con una costruzione geometrica la radice quadrata di 2, ma non si può trovare egualmente la sua radice cubica, almeno colle semplici operazioni della geometria elementare, le quali consistono nel non impiegare che linee rette, delle quali si conoscan due punti, e dei circoli, dei quali siano determinati i centri ed i raggi.

Per motivo di questa difficoltà il problema della *duplicazione del cubo* è stato celebre fra gli antichi geometri, come quello della *trisezione dell'angolo*, che è presso a poco del medesimo ordine. Ma si conoscono fin da gran tempo le soluzioni, cui queste specie di problemi sono suscettive,

le quali, benchè meno semplici delle costruzioni della geometria elementare, non son per altro nè meno esatte, nè meno rigorose (a).

PROPOSIZIONE XV.

TEOREMA.

La solidità d'un parallelepipedo, ed in generale la solidità d'un prisma qualunque è eguale al prodotto della sua base per la sua altezza.

Infatti 1.° un parallelepipedo qualunque è equivalente ad un parallelepipedo rettangolo della medesima altezza, e di base equivalente (*Prop. 11*). Ora la solidità di quest' ultimo è eguale alla sua base moltiplicata per la sua altezza; dunque la solidità del primo è parimente eguale al prodotto della sua base per la sua altezza.

2.° Ogni prisma triangolare è la metà d'un parallelepipedo costrutto in modo che abbia la medesima altezza, ed una base doppia (*Prop. 8*). Ora la solidità di questo ultimo è eguale alla sua base moltiplicata per la sua altezza; dunque quella del prisma triangolare è eguale al prodotto della sua base, metà di quella del parallelepipedo, moltiplicata per la sua altezza.

3.° Un prisma qualunque può esser diviso in tanti prismi triangolari della medesima altezza, quanti sono i triangoli che si ponno formare nel poligono che gli serve di base. Ma la solidità d'ogni prisma triangolare è eguale alla sua base moltiplicata per la sua altezza; e poichè l'altezza è la medesima per tutti, ne segue che la somma di tutti i prismi parziali sarà eguale alla somma di tutti i triangoli, che servon loro di basi, moltiplicata per l'altezza comune. Dunque la solidità d'un prisma po-

(a) *Per semplice notizia storica diciamo che le sopraddette soluzioni, cui i problemi della* trisezione dell'angolo *e della* duplicazione del cubo *sono suscettivi, si conoscevano fino dai tempi di* Platone. *E che* Ippocrate Chio *dimostrò come il celebre problema Deliaco, cioè quello della* duplicazione del cubo, *si riduceva a trovare due medie proporzionali tra il lato del cubo dato ed un lato doppio.* (Il Trad.)

ligono qualunque è eguale al prodotto della sua base per la sua altezza. Dunque *la solidità* etc. C. B. D.

Corollario. Se si paragonino due prismi che abbiano la medesima altezza, i prodotti delle basi per le altezze staranno come le basi; dunque *due prismi della medesima altezza stanno fra loro come le loro basi;* per una simil ragione, *due prismi della medesima base stanno fra loro come le loro altezze.*

PROPOSIZIONE XVI.

LEMMA.

Se una piramide è tagliata da un piano parallelo alla base, i lati e l'altezza della piramide saranno tagliati proporzionalmente, e la sezione sarà un poligono simile alla base.

Sia la piramide SABCDE (*fig. 214*) tagliata dal piano *abd* parallelo alla base; dico I.° che i lati SA, SB, SC etc. e l'altezza SO sono tagliati proporzionalmente in *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, ed in *o*. Fig. 214.

II.° La sezione *abcde* sarà un poligono simile alla base ABCDE.

Infatti I.° i piani ABC, *abc* essendo paralleli, le loro intersezioni AB, *ab* con un terzo piano SAB saranno parallele (*Prop. 10, lib. V*); dunque i triangoli SAB, *Sab* sono simili, e si à la proporzione

$$SA : Sa :: SB : Sb;$$

similmente si avrà

$$SB : Sb :: SC : Sc,$$

e così di seguito. Dunque i lati tutti SA, SB, SC, etc. sono tagliati proporzionalmente in *a*, *b*, *c*, etc. L'altezza SO è tagliata nella medesima proporzione al punto *o*; perchè BO e *bo* sono parallele, e così si à

$$SO : So :: SB : Sb.$$

II.° Poichè *ab* è parallela ad AB, *bc* a BC, *cd* a CD, etc., l'angolo *abc*=ABC, l'angolo *bcd*=BCD e così di seguito. Di più per i triangoli simili SAB, *Sab*, si à

$$AB : ab :: SB : Sb;$$

e per i triangoli simili SBC, Sbc si à

$$SB : Sb :: BC : bc;$$

dunque

$$AB : ab :: BC : bc;$$

si avrebbe similmente

$$BC : bc :: CD : cd,$$

e così in seguito. Dunque i poligoni ABCDE, *abcde* ànno gli angoli eguali respettivamente ed i lati omologhi proporzionali; dunque essi sono simili.

Corollario. Siano SABCDE, SXYZ due piramidi, il cui vertice è comune, e che ànno la medesima altezza, ovvero le cui basi sono situate sopra un medesimo piano; se taglinsi queste piramidi con uno stesso piano parallelo al piano delle basi, e che ne risultino le sezioni *abcde*, *xyz*; dico che le sezioni *abcde*, *xyz* staranno fra loro come le basi ABCDE, XYZ.

Infatti i poligoni ABCDE, *abcde*, essendo simili, le loro superficie stanno come i quadrati dai lati omologhi AB, *ab*; ma

$$AB : ab :: SA : Sa;$$

dunque

$$ABCDE : abcde :: \overline{SA}^2 : \overline{Sa}^2.$$

Per la stessa ragione,

$$XYZ : xyz :: \overline{SX}^2 : \overline{Sx}^2.$$

Ma poichè *abc*, *xyz* formano uno stesso piano, si à pure

$$SA : Sa :: SX : Sx;$$

dunque

$$ABCDE : abcde :: XYZ : xyz;$$

dunque le sezioni *abcde*, *xyz* stanno fra loro come le basi ABCDE, XYZ. Quindi se le basi ABCDE, XYZ sono equivalenti, le sezioni fatte ad eguale altezza sono ancora equivalenti.

PROPOSIZIONE XVII.

TEOREMA.

Due piramidi triangolari che ànno le basi equivalenti e le altezze eguali sono equivalenti.

Siano SABC, *sabc* (*fig. 215*) le due piramidi, le cui basi ABC, *abc* che suppongansi situate sopra un medesimo piano sieno equivalenti e che abbiano la stessa altezza TA; dico che queste piramidi sono equivalenti.

Fig. 215.

Se queste due piramidi non sono equivalenti, sia *sabc* la minore, e sia Ax l'altezza di un prisma che essendo costruito sulla base ABC sarebbe eguale alla loro differenza.

Dividasi l' altezza comune AD in parti eguali minori di Ax, e sia k una di queste parti; per i punti di divisione dell'altezza facciansi passare piani paralleli al piano delle basi; le sezioni fatte da ciascuno di questi piani nelle due piramidi saranno equivalenti (*Corol. Prop. 16*), tali che DEF e *def*, GHI e *ghi*, etc. Ciò posto, sopra i triangoli ABC, DEF, GHI etc., presi per basi, costruiscansi altrettanti prismi esterni che abbiano per costole le parti AD, DG, GK, etc. del lato SA. Similmente sopra i triangoli *def*, *ghi*, *klm*, etc., presi per basi, costruiscansi nella seconda piramide prismi interni che abbiano per costole le parti corrispondenti del lato *sa*; tutti questi prismi parziali avranno per altezza comune k.

La somma de' prismi esterni della piramide SABC è maggiore della stessa piramide, la somma de' prismi interni della piramide *sabc* è minore della medesima piramide; dunque per queste due ragioni la differenza tra le due somme de' prismi dovrà essere maggiore della differenza delle due piramidi.

Ora principiando dalle basi ABC, *abc*, il secondo prisma esterno DEFG è equivalente al primo prisma interno *defa*, poichè le loro basi DEF, *def* sono equivalenti ed ànno l'altezza comune k; per la stessa ragione sono equivalenti il terzo prisma esterno GHIK ed il secondo interno *ghid*, il quarto esterno ed il terzo interno, e così di seguito fino all'ultimo degli uni e degli altri. Dunque tutti i prismi esterni della piramide SABC, ad eccezione del primo ABCD, ànno i loro equivalenti ne' prismi interni della piramide *sabc*. Dunque il prisma ABCD è la differenza tra

la somma de' prismi esterni della piramide SABC e la somma de' prismi interni della piramide *sabc*; ma la differenza di queste due somme è maggiore della differenza delle due piramidi; dunque bisognerebbe che il prisma ABCD fosse maggiore del prisma ABCx; ora al contrario esso è minore, poichè essi ànno la medesima base ABC, e l' altezza k del primo è minore dell' altezza Ax del secondo. Dunque l' ipotesi dalla quale si è partito non potrebbe aver luogo; dunque le due piramidi SABC, *sabc*, che ànno le basi equivalenti ed eguali altezze sono equivalenti. Dunque *due piramidi triangolari* etc. C. B. D.

PROPOSIZIONE XVIII.

TEOREMA.

Ogni piramide triangolare è il terzo del prisma triangolare che à la medesima base e la medesima altezza.

Fig. 216. Sia SABC (*fig. 216*) una piramide triangolare, ABCDES un prisma triangolare che à la medesima base e la medesima altezza; dico che la piramide è il terzo del prisma.

Sottraggasi dal prisma la piramide SABC, resterà il solido SACDE che si può considerare come una piramide quadrangolare, il cui vertice è S, e che abbia per base il parallelogrammo ACDE. Tirisi la diagonale CE e conducasi il piano SCE che dividerà la piramide quadrangolare in due piramidi triangolari SACE, SDCE. Queste due piramidi ànno per altezza comune la perpendicolare abbassata dal vertice S sul piano ACDE; esse ànno le basi eguali, giacchè i triangoli ACE, DCE sono le due metà del medesimo parallelogrammo; dunque le due piramidi SACE, SDCE, sono equivalenti tra loro; ma la piramide SDCE e la piramide SABC ànno le basi eguali ABC, DES, ed ànno ancora la medesima altezza, poichè quest' altezza è la distanza de' piani paralleli ABC, DES; dunque le due piramidi SABC, SDCE sono equivalenti. Ma si è dimostrato che la piramide SDCE è equivalente alla piramide SACE; dunque le tre piramidi SABC, SDCE, SACE che compongono il prisma ADB sono equivalenti tra loro. Dunque la piramide SABC è il terzo del prisma ADB che à la medesima base e la medesima altezza. Dunque *ogni piramide triangolare* etc. C. B. D.

Corollario. La solidità di una piramide triangolare è eguale al terzo del prodotto della sua base per la sua altezza.

PROPOSIZIONE XIX.

TEOREMA.

Ogni piramide à per misura il terzo del prodotto della sua base per la sua altezza.

Sia la piramide SABCDE (*fig. 214*); dico che à per misura il terzo del prodotto della sua base ABCDE per la sua altezza SO. Fig. 214

Infatti, facendo passare i piani SEB, SEC per le diagonali EB, EC, si dividerà la piramide poligona SABCDE in più piramidi triangolari che avranno tutte la medesima altezza SO. Ma, pel teorema precedente, ognuna di queste piramidi si misura moltiplicando ciascuna delle basi ABE, BCE, CDE pel terzo della sua altezza SO; dunque la somma delle piramidi triangolari o la piramide poligona SABCDE avrà per misura la somma dei triangoli ABE, BCE, CDE, od il poligono ABCDE moltiplicato per $\frac{1}{3}$SO; dunque *ogni piramide à per misura la terza parte del prodotto della sua base per la sua altezza.* C. B. D.

Corollario I. Ogni piramide è il terzo del prisma che à la medesima base e la stessa altezza.

Corollario II. Due piramidi che ànno la stessa altezza stanno fra loro come le loro basi, e due piramidi della medesima base stanno fra loro come le loro altezze.

Scolio. Può valutarsi la solidità di ogni corpo poliedro decomponendolo in piramidi, e questa decomposizione può farsi in più maniere; una delle più semplici è di far passare i piani di divisione dal vertice di un medesimo angolo solido; allora si avranno altrettante piramidi parziali quante facce sono nel poliedro, eccetto quelle che formano l'angolo solido donde partono i piani di divisione.

PROPOSIZIONE XX.

TEOREMA.

Due poliedri simmetrici sono equivalenti fra loro od eguali in solidità.

Suppongansi che i due poliedri siano le due piramidi triangolari simmetriche SABC , TABC (*fig. 202*); dico che saranno equivalenti od eguali fra loro in solidità.

Fig. 202.

I.° Infatti le due piramidi triangolari simmetriche tali come SABC, TABC ànno per misura comune il prodotto della base ABC pel terzo dell' altezza SO o TO; dunque queste piramidi sono equivalenti fra loro.

II.° Se dividasi in una maniera qualunque uno dei poliedri simmetrici in piramidi triangolari, si potrà dividere parimente l'altro poliedro in piramidi triangolari simmetriche. Ora le piramidi triangolari simmetriche sono respettivamente equivalenti ; dunque i poliedri interi saranno equivalenti tra loro od eguali in solidità. Quindi *due poliedri* etc. C. B. D.

Scolio. Questa proposizione sembrava resultare immediatamente dalla proposizione II, ove si è dimostrato che in due poliedri simmetrici tutte le parti costituenti d'un solido sono eguali alle parti costituenti dell' altro; ma non era però meno necessàrio di dimostrarla in una maniera rigorosa.

PROPOSIZIONE XXI.

TEOREMA.

Se una piramide è tagliata da un piano parallelo alla sua base , il tronco che resta togliendo la piccola piramide è eguale alla somma di tre piramidi che avessero per altezza comune l' altezza del tronco, e le cui basi fossero la base inferiore del tronco , la base superiore ed una media proporzionale fra queste due basi.

Fig. 217. Sia SABCDE (*fig. 217*) una piramide tagliata dal piano *abd* parallelo alla base; dico che il tronco ABCDE*abcde* che resta togliendo la piccola piramide S*abcde* è eguale alla somma di tre piramidi che avessero per altezza comune l'altezza del tronco ABCDE*abcde*, e le cui basi fossero la

base inferiore del tronco cioè ABCDE, la base superiore cioè *abcde*, ed un' altra che sia media proporzionale fra queste due basi.

Sia TFGH una piramide triangolare, la cui base e l'altezza siano eguali ed equivalenti a quelle della piramide SABCDE. Si può supporre le due basi situate sopra un medesimo piano; ed allora il piano *abd*, prolungato, determinerà nella piramide triangolare una sezione *fgh*, situata alla stessa altezza al di sopra del piano comune delle basi; donde resulta che la sezione *fgh* sta alla sezione *abd* come la base FGH sta alla base ABD (*Prop. 16*); e poichè le basi sono equivalenti, lo saranno ancora le sezioni. Le piramidi S*abcde*, T*fgh* sono dunque equivalenti, giacchè ànno la medesima altezza e basi equivalenti. Le piramidi intere SABCDE, TFGH sono equivalenti per la medesima ragione; dunque i tronchi ABD*dab*, FGH*hfg* sono equivalenti, e per conseguenza basterà dimostrare la proposizione enunciata pel solo caso del tronco di piramide triangolare.

Sia FGH*hfg* (*fig. 218*) un tronco di piramide triangolare a basi parallele; per i tre punti F, *g*, H conducasi il piano F*g*H che taglierà dal tronco la piramide triangolare *g*FGH. Questa piramide à per base la base inferiore FGH del tronco, essa à ancora per altezza l'altezza del tronco, poichè il vertice *g* è nel piano della base superiore *fgh*. Fig. 218.

Dopo aver tolto questa piramide resterà la piramide quadrangolare *gfh*HF, il cui vertice è *g* e la base *fh*HF. Per i tre punti *f*, *g*, H conducasi il piano *fg*H che dividerà la piramide quadrangolare in due piramidi triangolari *g*F*f*H, *gfh*H. Quest' ultima à per base la base superiore *gfh* del tronco, e per altezza l' altezza del tronco, poichè il suo vertice H appartiene alla base inferiore; abbiamo così due delle tre piramidi che debbono comporre il tronco.

Resta a considerare la terza piramide *g*F*f*H; ora, se conducasi *g*K parallela ad *f*F, e che s' immagini una nuova piramide *f*FHK, il cui vertice è K e la base *f*FH, queste due piramidi avranno la medesima base *f*FH; essè avranno ancora la medesima altezza, poichè i vertici *g* e K sono situati sopra una linea *g*K parallela ad F*f*, e per conseguenza parallela al piano della base; dunque queste piramidi sono equivalenti. Ma la piramide *f*FKH può considerarsi come avente il vertice in *f*, e così essa avrà la me-

desima altezza del tronco; quanto poi alla sua base FKH, dico che essa è media proporzionale fra le basi FHG, *fgh*. Infatti i triangoli FHK, *fgh* ànno un angolo eguale F=*f*, ed un lato eguale FK=*fg*; si à dunque (*Prop. 24, lib. III*)

FHK : *fgh* :: FH : *fh*.

Si à ancora

FHG : FHK :: FG : FK o *fg*.

Ma i triangoli simili FGH, *fgh* danno

FG : *fg* :: FH : *fh*;

dunque

FGH : FHK :: FHK : *fgh*;

e quindi la base FHK è media proporzionale tra le due basi FGH, *fgh*. Dunque *un tronco di piramide triangolare a basi parallele equivale a tre piramidi che ànno per altezza comune l' altezza del tronco, e le cui basi siano la base inferiore del tronco, la base superiore ed una media proporzionale fra queste due basi.* C. B. D.

PROPOSIZIONE XXII.

TEOREMA.

Se si tagli un prisma triangolare, la cui base è ABC (Fig. 216), *con un piano* DES *inclinato a questa base, il solido* ABCDES *che resulta da questa sezione sarà eguale alla somma di tre piramidi, i vertici delle quali sono* D, E, S, *e la base comune* ABC.

Fig. 216.

Per i tre punti S, A, C facciasi passare il piano SAC che taglierà dal prisma troncato ABCDES la piramide triangolare SABC; questa piramide à per base ABC e per vertice il punto S.

Dopo aver tolta questa piramide, resterà la piramide quadrangolare SACDE, cui S è il vertice ed ACDE la base. Per i tre punti S, E, C conducasi un piano SEC che dividerà la piramide quadrangolare in due piramidi triangolari SACE, SCDE.

La piramide SAEC che à per base il triangolo AEC e per vertice il punto S è equivalente ad una piramide EABC che avesse per base AEC e per vertice il punto

B. Difatti queste due piramidi ànno la medesima base; desse ànno ancora la medesima altezza, poichè la linea BS essendo parallela a ciascuna delle linee AE, CD è parallela al loro piano ACE; dunque la piramide SAEC è equivalente alla piramide EABC, la quale può esser considerata come se avesse per base ABC e per vertice il punto E.

La terza piramide SCDE può esser cangiata primieramente in ASCD, perchè queste due piramidi ànno la medesima base SCD; desse ànno ancora la medesima altezza, poichè AE è parallela al piano SCD; dunque la piramide SCDE è equivalente ad ASCD. In seguito la piramide ASCD può esser trasformata in ABCD, perchè queste due piramidi ànno la base comune ACD; esse ànno ancora la medesima altezza, poichè i loro vertici S e B sono situati sopra una parallela al piano della base. Dunque la piramide SCDE, equivalente ad ASCD, è ancora equivalente ad ABCD; ora questa piramide può essere riguardata come se avesse per base ABC e per vertice il punto D.

Dunque finalmente *il prisma troncato ABCDES è eguale alla somma di tre piramidi che ànno per base comune ABC ed i cui vertici sono respettivamente i punti D, E, S.* — C. B. D.

Corollario. Se le costole AE, BS, CD sono perpendicolari al piano della base, esse saranno nel medesimo tempo le altezze delle tre piramidi che compongono il prisma troncato; di modo che la solidità del prisma troncato sarà allora espressa da

$$\frac{1}{3}\,ABC \times AE + \frac{1}{3}\,ABC \times BS + \frac{1}{3}\,ABC \times CD;$$

quantità che riducesi ad

$$\frac{1}{3}\,ABC \times (AE + BS + CD).$$

PROPOSIZIONE XXIII.

TEOREMA.

Due piramidi triangolari simili ànno le facce omologhe simili e gli angoli solidi omologhi eguali.

Fig.203. Siano le due piramidi triangolari SABC, TDEF (*fig.203*), che secondo la definizione sono simili se i due triangoli SAB, ABC sono simili ai due triangoli TDE, DEF e similmente disposti, cioè se si à l'angolo ABS=DET, BAS=EDT, ABC=DEF, BAC=EDF, e se inoltre l'inclinazione dei piani SAB, ABC è eguale a quella dei piani TDE, DEF; ciò posto dico che queste piramidi ànno tutte le facce simili respettivamente e gli angoli solidi omologhi eguali.

Prendasi BG=ED, BH=EF, BI=ET, e congiungansi GH, GI, IH. La piramide TDEF è eguale alla piramide IGBH; poichè avendo presi i lati GB, BH eguali ai lati DE, EF e l'angolo GBH essendo per ipotesi eguale all'angolo DEF, il triangolo GBH è eguale a DEF; dunque, per operare la soprapposizione delle due piramidi, si può primieramente situare la base DEF sulla sua eguale GBH; in seguito, poichè il piano DTE è inclinato sopra DEF quanto il piano SAB sopra ABC, egli è chiaro che il piano DET cadrà indefinitamente sul piano ABS. Ma per ipotesi l'angolo DET=GBI, dunque ET cadrà sopra il suo eguale BI; e poichè i quattro punti D, E, F, T coincidono con i quattro G, B, H, I, ne segue (*Prop. 1*) che la piramide TDEF coincide con la piramide IGBH.

Ora, per i triangoli eguali DEF, GBH, si à l'angolo BGH=EDF=BAC; dunque GH è parallela ad AC. Per una simile ragione GI è parallela ad AS; dunque il piano IGH è parallelo ad SAC (*Prop. 13, lib. V*). Da ciò segue che il triangolo IGH od il suo eguale TDF è simile ad SAC (*Prop. 15*), e che il triangolo IBH od il suo eguale TEF è simile ad SBC; dunque le due piramidi triangolari simili SABC, TDEF ànno le quattro facce respettivamente simili; di più ànno gli angoli solidi omologhi eguali.

Imperciocchè si è di già situato l'angolo E sul suo omologo B, e si potrebbe fare lo stesso per due altri angoli solidi omologhi; ma vedesi immediatamente che i due angoli solidi omologhi sono eguali, per esempio gli angoli

T ed S, poichè sono formati da tre angoli piani eguali respettivamente e similmente disposti.

Dunque *due piramidi triangolari simili ànno le facce omologhe simili e gli angoli solidi omologhi eguali.* C.B.D.

Corollario I. I triangoli simili nelle due piramidi danno le proporzioni

AB:DE::BC:EF::AC:DF::AS:DT::SB:TE::SC:TF ;

dunque *nelle piramidi triangolari simili i lati omologhi sono proporzionali.*

Corollario II. E poichè gli angoli solidi omologhi sono eguali, ne segue che *l' inclinazione di due facce qualunque d' una piramide è eguale all' inclinazione delle facce omologhe della piramide simile.*

Corollario III. Se si tagli la piramide triangolare SABC con un piano GIH parallelo ad una delle facce SAC, la piramide parziale BGIH sarà simile alla piramide intera BASC; infatti i triangoli BGI, BGH, sono respettivamente simili e similmente posti ai triangoli BAS, BAC; l' inclinazione dei loro piani è la medesima da ambe le parti; dunque le due piramidi sono simili.

Corollario IV. In generale *se si tagli una piramide qualunque* SABCDE *(fig. 214) con un piano* abcde *parallelo alla base, la piramide parziale* Sabcde *sarà simile alla piramide intera* SABCDE. Infatti le basi ABCDE, *abcde* sono simili, e congiungendo AC, *ac* si è dimostrato che la piramide triangolare SABC è simile alla piramide S*abc*; dunque il punto S è determinato per rapporto alla base ABC come il punto S per rapporto alla base *abc* (*Def. 18*); dunque le due piramidi SABCDE, S*abcde* sono simili. Fig. 214.

Scolio. In vece dei cinque dati richiesti dalla definizione perchè due piramidi triangolari sieno simili, si potrebbero sostituirne altri cinque secondo differenti combinazioni, e ne resulterebbero altrettanti teoremi, fra i quali si può distinguere questo: *Due pirami triangolari sono simili allorchè esse ànno i lati omologhi proporzionali.*

Infatti se si ànno le proporzioni (*fig. 203*) Fig. 203.

AB:DE::BC:EF::AC:DF::AS:DT::SB:TE::SC:TF,

ciò che comprende cinque condizioni, i triangoli ABS, ABC saranno simili ai triangoli DET, DEF e similmente disposti. Si avrà pure il triangolo SBC simile a TEF; dunque i tre angoli piani che formano l' angolo solido B saranno

eguali respettivamente ai tre angoli piani che formano l'angolo solido E; donde ne segue che l' inclinazione dei piani SAB, ABC è eguale a quella dei loro omologhi TDE, DEF, e che le due piramidi sono simili.

PROPOSIZIONE XXIV.

TEOREMA.

Due poliedri simili ànno le facce omologhe simili e gli angoli solidi omologhi eguali.

Fig. 219. Sia ABCDE (*fig. 219*) la base di un poliedro; siano M ed N i vertici di due angoli solidi fuori di questa base, determinati dalle piramidi triangolari MABC, NABC, la cui base comune è ABC; siano nell' altro poliedro *abcde* la base omologa o simile ad ABCDE, *m* ed *n* i vertici omologhi ad M ed N, determinati dalle piramidi *mabc*, *nabc*, simili alle piramidi MABC, NABC; dico primieramente che le distanze MN, *mn* sono proporzionali ai lati omologhi AB, *ab*.

Infatti, essendo simili le piramidi MABC, *mabc*, l' inclinazione dei piani MAC, BAC è eguale a quella dei piani *mac*, *bac*; parimente le piramidi NABC, *nabc* essendo simili, l' inclinazione dei piani NAC, BAC è eguale a quella dei piani *nac*, *bac*; dunque, se si tolgano le prime inclinazioni dalle ultime resterà l' inclinazione dei piani NAC, MAC eguale a quella dei piani *nac*, *mac*. Ma, per la similitudine delle medesime piramidi, il triangolo MAC è simile ad *mac*, ed il triangolo NAC è simile ad *nac*; dunque le due piramidi triangolari MNAC, *mnac* ànno due facce respettivamente simili, similmente disposte ed egualmente inclinate fra loro; dunque queste piramidi sono simili (*Prop. 21*) ed i loro lati omologhi danno la proporzione

$$MN : mn :: AM : am.$$

D' altronde

$$AM : am :: AB : ab;$$

dunque

$$MN : mn :: AB : ab.$$

Siano P e *p* due altri vertici omologhi dei medesimi poliedri; si avrà similmente

$$PN : pn :: AB : ab.$$
$$PM : pm :: AB : ab.$$

Dunque

$$MN : mn :: PN : pn :: PM : pm.$$

Dunque *il triangolo* PNM *che unisce tre vertici qualunque di un poliedro è simile al triangolo* pnm *che congiunge i tre vertici omologhi dell' altro poliedro.*

Siano ancora Q e q due vertici omologhi ed il triangolo PQN sarà simile a pqn. Dico di più che l'inclinazione dei piani PQN, PMN è eguale a quella dei piani pqn, pmn.

Infatti, se si tirino QM, qm, si avrà sempre il triangolo QNM simile a qnm, e per conseguenza l'angolo QNM eguale a qnm. Concepiscasi in N un angolo solido formato da tre angoli piani QNM, QNP, PNM, ed in n un angolo solido formato dai tre angoli piani qnm, qnp, pnm; poichè questi angoli piani sono eguali respettivamente, ne segue che gli angoli solidi sono eguali. Dunque l' inclinazione dei due piani PNQ, PNM è eguale a quella dei loro omologhi pnq, pnm; dunque se i due triangoli PNQ, PNM fossero in un medesimo piano, nel qual caso si avrebbe l'angolo QNM=QNP+PNM, si avrebbe pure l'angolo $qnm=qnp+pnm$, ed i due triangoli qnp, pnm sarebbero pure in un medesimo piano.

Tutto ciò che abbiamo dimostrato à luogo qualunque siano gli angoli M, N, P, Q paragonati ai loro omologhi m, n, p, q.

Suppongasi adesso che la superficie d' uno dei poliedri sia divisa in triangoli ABC, ACD, MNP, NPQ, etc.; si vede che la superficie dell' altro poliedro conterrà un egual numero di triangoli abc, acd, mnp, npq, etc. simili e similmente disposti; e se più triangoli, come MPN, NPQ etc., appartengano ad una medesima faccia e sono in un medesimo piano, i loro omologhi mpn, npq, etc. saranno parimente in un medesimo piano. Dunque ogni faccia poligona in un poliedro corrisponderà ad una faccia poligona simile nell'altro poliedro; dunque i due poliedri saranno compresi da un medesimo numero di piani simili e similmente disposti. Dico di più che gli angoli solidi omologhi saranno eguali.

Infatti, se l'angolo solido N, per esempio, è formato dagli angoli piani QNP, PNM, MNR, QNR, l'angolo solido

omologo *n* sarà formato dagli angoli piani *qnp* , *pnm* , *mnr*, *qnr*. Ora questi angoli piani sono respettivamente eguali , e l' inclinazione di due piani adiacenti è eguale a quella dei loro omologhi ; dunque i due angoli solidi sono eguali , giacchè possono essere soprapposti.

Dunque finalmente *due poliedri simili ànno le facce omologhe simili e gli angoli solidi omologhi eguali*. C.B.D.

Corollario. Segue dalla dimostrazione precedente che, se con quattro vertici d' un poliedro si formi una piramide triangolare, e si formi pure un'altra piramide con quattro vertici omologhi d' un poliedro simile , queste due piramidi saranno simili, perchè avranno i lati omologhi proporzionali (*Scol. Prop. 23*).

Si vede nel tempo stesso che due diagonali omologhe (*Prop. 17, lib. II*), per esempio, AN, *an*, stanno fra loro come due lati omologhi AB , *ab*.

PROPOSIZIONE XXV.

TEOREMA.

Due poliedri simili possono dividersi in un medesimo numero di piramidi triangolari simili respettivamente e similmente disposte.

Infatti si è già veduto che le superficie di due poliedri si possono dividere in un medesimo numero di triangoli simili respettivamente e similmente disposti. Considerinsi tutti i triangoli d'un poliedro, fuorchè quelli che formano l'angolo solido A, come basi di tante piramidi triangolari, il cui vertice è in A ; queste piramidi prese insieme comporranno il poliedro : dividasi parimente l'altro poliedro in piramidi che abbiano per vertice comune quello dell'angolo *a* omologo ad A ; è chiaro che la piramide la quale congiunge quattro vertici d'un poliedro sarà simile alla piramide che congiunge i quattro vertici omologhi dell'altro poliedro. Dunque *due poliedri simili* etc. C. B. D.

PROPOSIZIONE XXVI.

TEOREMA.

Due piramidi simili stanno fra loro come i cubi dei lati omologhi.

Siano le piramidi simili SABCDE, *Sabcde* (*fig.* 214); Fig. 214. dico che stanno fra loro come i cubi dei lati omologhi AB, *ab*.

Infatti due piramidi essendo simili, la minore potrà essere situata sulla maggiore, in modo che abbiano l' angolo solido S comune; allora le basi ABCDE, *abcde* saranno parallele; poichè, siccome le facce omologhe sono simili (*Prop.* 23), l' angolo S*ab* è eguale ad SAB, come pure S*bc* ad SBC; dunque il piano *abc* è parallelo al piano ABC (*Prop.* 13, *lib.* V). Ciò posto, sia SO la perpendicolare abbassata dal vertice S sopra il piano ABC, e sia *o* il punto ove questa perpendicolare incontra il piano *abc*; si avrà, secondo ciò che si è dimostrato (*Prop.* 16)

$$SO : So :: SA : Sa :: AB : ab;$$

e per conseguenza

$$\frac{1}{3}SO : \frac{1}{3}So :: AB : ab.$$

Ma le basi ABCDE, *abcde* essendo figure simili, si à

$$ABCDE : abcde :: \overline{AB}^2 \ \overline{ab}^2.$$

Moltiplicando queste due proporzioni termine per termine, ne resulterà la proporzione

$$ABCDE \times \frac{1}{3} SO : abcde \times \frac{1}{3} So :: \overline{AB}^3 \ \overline{ab}^3.$$

Ora ABCDE $\times \frac{1}{3}$ SO è la solidità della piramide SABCDE (*Corol. Prop.* 18), ed *abcde* $\times \frac{1}{3}$ So è la solidità

della piramide $Sabcde$; dunque *due piramidi simili stanno fra loro come i cubi dei loro lati omologhi*. C. B. D.

PROPOSIZIONE XXVII.

TEOREMA.

Due poliedri simili stanno fra loro come i cubi dei lati omologhi.

Siano i due poliedri simili che ànno per basi ABCDE, Fig. 219. *abcde* (*fig. 219*) ; dico che stanno fra loro come i cubi dei lati omologhi AB , *ab*.

Infatti due poliedri simili possono essere divisi in un medesimo numero di piramidi triangolari respettivamente simili (*Prop. 25*). Ora le due piramidi simili APNM , *apnm* stanno fra loro come i cubi dei lati omologhi AM, *am*, o come i cubi dei lati omologhi AB, *ab*. Il medesimo rapporto avrà luogo fra due altre piramidi omologhe qualunque; dunque la somma di tutte le piramidi che compongono un poliedro od il poliedro stesso sta all' altro poliedro come il cubo di un lato qualunque del primo sta al cubo del lato omologo del secondo. Dunque *due poliedri* etc. C. B. D.

SCOLIO GENERALE.

Si potrà presentare in termini algebrici, cioè nella maniera più succinta, la recapitolazione delle principali proposizioni di questo libro, relative alla solidità dei poliedri.

Sia B la base di un prisma, H la sua altezza; la solidità del prisma sarà $B \times H$ o BH.

Sia B la luce di una piramide, H la sua altezza; la solidità della piramide sarà

$$B \times \frac{1}{3} H \text{ o } H \times \frac{1}{3} B \text{ o } \frac{1}{3} HB.$$

Sia H l'altezza di un tronco di piramide a basi parallele, siano A, B le sue basi ; $\sqrt{AB}$ sarà la media proporzionale fra esse , e la solidità del tronco sarà

$$\frac{1}{3} H \times (A \times B \times \sqrt{AB}).$$

Sia B la base di un tronco di prisma triangolare , H,

H', H'' le altezze dei suoi tre vertici superiori; la solidità del prisma troncato sarà

$$\frac{1}{3} B \times (H + H' + H'').$$

Siano finalmente P e p le solidità di due poliedri simili, A ed a due lati o due diagonali omologhe di questi poliedri; si avrà

$$P : p :: A^3 : a^3.$$

LIBRO SETTIMO

LA SFERA

DEFINIZIONI

I. La SFERA è un solido terminato da una superficie curva, della quale tutti i punti sono egualmente distanti da un punto interno che si chiama *centro*.

Fig. 220. Si può immaginare la sfera (*fig.* 220) generarsi dalla rivoluzione del semicerchio DAE intorno al diametro DE, poichè la superficie descritta in questo movimento dalla curva DAE avrà tutti i suoi punti ad eguali distanze dal centro C.

II. Il *raggio della sfera* è una linea retta condotta dal centro ad un punto della superficie; il *diametro* od *asse* è una linea che passa pel centro e termina da ambe le parti alla superficie.

Tutti i raggi della sfera sono eguali; tutti i diametri sono eguali e doppî del raggio.

III. Si dimostrerà nella prima proposizione che ogni sezione della sfera fatta da un piano è un cerchio; posto ciò si chiama *circolo massimo* la sezione che passa pel centro della sfera; *circolo minore* quello che non passa pel centro della sfera.

IV. Un *piano* è *tangente* alla sfera quando non à che un sol punto con la superficie della sfera.

V. Il *polo di un cerchio* della sfera è un punto della superficie della sfera egualmente lontano da tutti i punti della circonferenza di quel cerchio. Si farà vedere nella proposizione sesta che ogni cerchio grande o piccolo à sempre due poli.

VI. *Triangolo sferico* è una porzione della superficie della sfera racchiusa da tre archi di circoli massimi.

Questi archi che si chiamano i *lati* del triangolo sono

sempre supposti minori della semicirconferenza. Gli angoli che i loro piani fanno fra loro sono gli angoli del triangolo.

VII. Un triangolo sferico prende il nome di *rettangolo*, *isoscele*, *equilatero* negli stessi casi di un triangolo rettilineo.

VIII. *Poligono sferico* è una porzione della superficie della sfera terminata da più archi di circoli massimi.

IX. *Fuso* è la parte della superficie della sfera compresa da due semicircoli massimi che si terminano ad un diametro comune.

X. Si chiamerà *cuneo*, ovvero *unghia sferica*, la parte del solido della sfera compresa fra i medesimi semicircoli massimi, ed alla quale il fuso serve di base.

XI. *Piramide sferica* è la parte del solido della sfera compresa fra i piani di un angolo solido, il cui vertice è al centro. La *base* della piramide è il poligono sferico intercettato dai medesimi piani.

XII. Si chiama *zona* la parte della superficie della sfera compresa fra due piani paralleli che ne sono le basi. Uno di questi piani può essere tangente alla sfera; allora la zona non à che una base.

XIII. *Segmento sferico* è la porzione del solido della sfera compresa fra due piani paralleli che ne sono le *basi*. Uno di questi piani può essere tangente alla sfera; allora il segmento sferico non à che una base.

XIV. *L'altezza di una zona* o *di un segmento* (a) è la distanza dei due piani paralleli che sono le basi della zona o del segmento.

XV. Mentre che il semicircolo DAE (*fig.* 220) girando intorno al diametro DE descrive la sfera, ogni settore circolare, come DCF o FCH, descrive un solido che si chiama *settore sferico*. Fig. 220.

(a) Aggiungi *sferico*. (Il Trad.)

PROPOSIZIONE PRIMA.

TEOREMA.

Ogni sezione della sfera fatta da un piano è un circolo.

Fig. 221. Sia AMB (*fig. 221*) la sezione fatta da un piano nella sfera che à per centro C; dico che AMB è un circolo.

Dal punto C conducasi la perpendicolare CO sopra il piano AMB, e differenti linee CM, CM, CB a differenti punti della curva AMB che termina la sezione.

Le obblique CM, CM; CB sono eguali, poichè esse sono raggi della sfera; esse sono dunque egualmente lontane dalla perpendicolare CO (*Prop. 5, lib. V*); dunque tutte le linee OM, OM, OB sono eguali; dunque la sezione AMB è un circolo, il cui centro è il punto O. Dunque *ogni sezione* etc. C. B. D.

Corollario I. Se la sezione passa pel centro della sfera, il suo raggio sarà il raggio della sfera; dunque tutti i circoli massimi sono eguali fra loro.

Corollario II. Due circoli massimi si tagliano sempre in due porzioni eguali; infatti la loro comune intersezione passando pel centro è un diametro.

Corollario III. Ogni cerchio massimo divide la sfera e la sua superficie in due porzioni eguali; poichè se, dopo aver separati i due emisferi, si applicano sulla base comune rivolgendo la loro convessità dal medesimo lato, le due superficie coincideranno l' una con l' altra, altrimenti vi sarebbero punti più vicini al centro gli uni che gli altri.

Corollario IV. Il centro di un circolo minore e quello della sfera sono sopra una medesima retta perpendicolare Fig. 221. al piano del circolo minore (*fig. 221*).

Corollario V. I circoli minori sono tanto più piccoli, quanto sono più lontani dal centro della sfera; infatti quanto la distanza CO è maggiore, più piccola è la corda AB, diametro del piccolo circolo AMB.

Corollario VI. Per due punti dati sulla superficie di una sfera si può far passare un arco di circolo massimo; infatti i due punti dati ed il centro della sfera sono tre punti che determinano la posizione di un piano. Se intanto i due punti dati fossero all' estremità di un diametro, allora questi due punti ed il centro sarebbero in linea retta, e vi sarebbe un' infinità di circoli massimi che potrebbero passare per i due punti dati.

PROPOSIZIONE II.

TEOREMA.

In ogni triangolo sferico un lato qualunque è minore della somma degli altri due.

Sia il triangolo sferico ABC (*fig. 222*); dico che un lato qualunque è minore della somma degli altri due. Fig. 222.

Sia O il centro della sfera; tirinsi i raggi OA, OB, OC. Se s' immaginino i piani AOB, AOC, COB, questi piani formeranno al punto O un angolo solido; e gli angoli AOB, AOC, COB avranno per misura i lati AB, AC, BC del triangolo sferico ABC. Ora ciascuno dei tre angoli piani che compongono l' angolo solido è minore della somma degli altri due (*Prop. 21, lib. V*); dunque un lato qualunque del triangolo ABC è minore della somma degli altri due. Quindi *in ogni triangolo* etc. C. B. D.

PROPOSIZIONE III.

TEOREMA.

Il più corto cammino da un punto ad un altro sulla superficie di una sfera è l' arco di cerchio massimo che unisce i due punti dati.

Sulla superficie di una sfera siano due punti A , B (*fig. 223.*); dico che il più corto cammino dal punto A al punto B sia ANB arco del cerchio massimo che unisce i due punti. Fig. 223.

Se ciò non è, allora vi sarà un' altra linea più corta dell' arco ANB. Sia fuori di questo arco, s' è possibile, un punto M della linea più corta fra A e B. Pel punto M conducansi gli archi di circoli massimi MA , MB , e prendasi BN=MB.

Secondo il teorema precedente l'arco ANB è minore di AM+MB; togliendo da una parte e dall' altra BN=BM, resterà AN<AM. Ora la distanza da B ad M, sia che essa si confonda con l'arco BM, o che essa sia qualunque altra linea, è eguale alla distanza da B ad N; infatti facendo girare il piano del cerchio massimo BM intorno al diame-

tro che passa per B, si può condurre il punto M sul punto N, ed allora la linea più corta da M a B, qualunque sia, si confonderà con quella da N a B; dunque i due cammini da A a B, l'uno che passa per M, l' altro che passa per N, ànno una parte eguale da M a B e da N a B. Il primo cammino è per ipotesi il minore; dunque la distanza da A ad M è minore della distanza da A ad N: ciò sarebbe assurdo, poichè l' arco AM è maggiore di AN; dunque nessun punto della linea più corta fra A e B può essere fuori dell' arco ANB; dunque quest' arco è esso stesso la linea più corta fra le sue estremità. Dunque *il più corto cammino da un* etc. C. B. D.

PROPOSIZIONE IV.

TEOREMA.

La somma dei tre lati di un triangolo sferico è minore della circonferenza di un cerchio massimo.

Fig. 224. Sia ABC un triangolo sferico qualunque (*fig. 224*); dico che la somma dei tre lati AC, CB, BA è minore di un cerchio massimo.

Prolunghinsi i lati AB, AC, finchè essi s' incontrino di nuovo in D. Gli archi ABD, ACD saranno mezze circonferenze, poichè due circoli massimi si tagliano sempre in due parti eguali (*Prop. 1, Coroll. II*); ma nel triangolo BCD il lato BC < DB + CD (*Prop. 2*); aggiungendo alle due parti AB + AC, si avrà AB + AC + BC < ABD + ACD, cioè minore di una circonferenza. Quindi *la somma dei tre lati* etc. C. B. D.

PROPOSIZIONE V.

TEOREMA.

La somma dei lati di ogni poligono sferico è minore della circonferenza di un cerchio massimo.

Fig. 225. Sia, per esempio, il pentagono ABCDE (*fig. 225*); dico che la somma dei lati AB, BC, CD, DE è minore della circonferenza d' un cerchio massimo.

Prolunghinsi i lati AB, DC fino al loro incontro in F;

poichè BC è minore di BF+CF, il contorno del pentagono ABCDE è minore di quello del quadrilatero AEDF. Prolunghinsi di nuovo i lati AE, FD fino al loro incontro in G; si avrà ED $<$ EG + GD; dunque il contorno del quadrilatero AEDF è minore di quello del triangolo AFG; questo è minore della circonferenza d' un cerchio massimo (*Prop. prec.*); dunque *a fortiori* il contorno del poligono ABCDE è minore di questa stessa circonferenza. Quindi *la somma dei lati* etc. C. B. D.

Scolio. Questa proposizione è in sostanza la medesima che la 22ª del V libro; infatti se O è il centro della sfera, si può immaginare al punto O un angolo solido formato dagli angoli piani AOB, BOC, COD, DOE, e la somma di questi angoli dev'essere minore di quattro angoli retti, ciò che non differisce dalla proposizione presente. La dimostrazione che ora ne abbiamo data è differente da quella del libro V; l'una e l'altra suppongono che il poligono ABCDE sia convesso, ovvero che nessun lato prolungato taglia la figura.

PROPOSIZIONE VI.

TEOREMA.

Se in una sfera si conduca un diametro perpendicolare al piano di un cerchio massimo, le estremità di questo diametro saranno i poli di questo cerchio massimo e di tutti i circoli minori che gli sono paralleli.

Se nella sfera che à per centro C (*fig. 220*) si conduca il diametro DE perpendicolare al piano del cerchio massimo AMB; dico che le estremità D ed E di questo diametro saranno i poli di esso cerchio massimo AMB, e di tutti i circoli minori, come FNG, che gli sono paralleli.

Fig. 220.

Infatti DC, essendo perpendicolare al piano AMB, è perpendicolare a tutte le rette CA, CM, CB, etc. condotte dal suo piede in questo piano; dunque tutti gli archi DA, DM, DB, etc. sono quarte parti di circonferenza; è lo stesso degli archi EA, EM, EB etc.; dunque i punti D ed E sono ciascuno egualmente lontani da tutti i punti della circonferenza AMB; dunque essi punti D ed E sono i poli di questa circonferenza (*Def. 5*).

Secondariamente, il raggio DC perpendicolare al piano AMB è perpendicolare al suo parallelo FNG; dunque

esso passa pel centro O del cerchio FNG (*Prop. 1*); dunque se si tirino le obblique DF, DN, DG, queste obblique si allontaneranno egualmente dalla perpendicolare DO e saranno eguali. Ma le corde essendo eguali sono eguali gli archi corrispondenti; dunque tutti gli archi DF, DN, DG etc. sono fra loro eguali; dunque il punto D è il polo del piccolo cerchio FNG, e per la stessa ragione il punto E è l'altro polo. Quindi *se in una sfera si conduca* etc. C. B. D.

Corollario I. Ogni arco DM condotto da un punto dell'arco di cerchio massimo AMB al suo polo è un quarto di circonferenza, e si chiamerà per brevità *quadrante*, e questo quadrante fa nel tempo stesso un angolo retto con l'arco AM. Poichè la linea DC essendo perpendicolare al piano AMC, ogni piano DMC che passa per la linea DC, è perpendicolare al piano AMC (*Prop. 18, lib. VI*); dunque l'angolo di questi piani, o secondo la definizione VI, l'angolo AMD è un angolo retto.

Corollario II. Per trovare il polo di un arco dato AM conducasi l'arco indefinito MD perpendicolare ad AM, prendasi MD eguale ad un quadrante, ed il punto D sarà uno dei poli dell'arco AM; ovvero conducasi ai due punti A ed M gli archi AD, MD perpendicolari ad AM, il punto d'incontro D di questi due archi sarà il polo domandato.

Corollario III. Reciprocamente se la distanza del punto D a ciascuno dei punti A ed M è eguale ad un quadrante; dico che il punto D sarà il polo dell'arco AM, e che nel medesimo tempo gli angoli DAM, AMD saranno retti.

Infatti sia C il centro della sfera e siano condotti i raggi CA, CD, CM. Poichè gli angoli ACD, MCD sono retti, la linea CD è perpendicolare alle due rette CA, CM; dunque essa è perpendicolare al loro piano; dunque il punto D è il polo dell'arco AM, ed in conseguenza gli angoli DAM, AMD sono retti.

Scolio. Le proprietà dei poli permettono di tracciare sopra la superficie della sfera archi di circolo colla medesima facilità che sopra una superficie piana. Osservisi, per esempio, che facendo girare l'arco DF o qualunque altra linea dello stesso intervallo intorno al punto D, l'estremità F descriverà il cerchio minore FNG; e se si faccia girare il quadrante DFA intorno al punto D, l'estremità A descriverà l'arco di cerchio massimo AM.

Se bisogna prolungare l'arco AM, o se non siano dati che i punti A ed M, per i quali deve passare quest'arco,

si determinerà prima il polo D colla intersezione di due archi descritti dai punti A ed M come centri con un intervallo eguale al quadrante. Il polo D essendosi trovato, si descriverà dal punto D come centro e col medesimo intervallo, l'arco AM ed il suo prolungamento.

Finalmente, se dal punto dato P si deve abbassare un arco perpendicolare sull' arco dato AM, si prolungherà questo arco in S sino a che l' intervallo PS sia eguale ad un quadrante; in seguito dal polo S e col medesimo intervallo si descriverà l' arco PM che sarà l'arco perpendicolare richiesto.

PROPOSIZIONE VII.

TEOREMA.

Ogni piano perpendicolare all' estremità di un raggio (a) *è tangente alla sfera.*

Sia FAG (*fig.* 226) un piano perpendicolare all' estremità del raggio OA della sfera che à per centro O; dico che il piano FAG è tangente alla sfera. Fig. 226.

Se prendasi un punto qualunque M sopra questo piano, e si tirino OM ed AM, l'angolo OAM sarà retto, e perciò la distanza OM sarà maggiore di OA. Il punto M è dunque fuori della sfera; e, come è lo stesso per qualunque altro punto del piano FAG, ne segue che questo piano non à che il solo punto A comune colla superficie della sfera; dunque è tangente a questa superficie (*Def.4*). Quindi *ogni piano perpendicolare* etc. C. B. D.

Scolio. Si può dimostrare similmente che due sfere non ànno che un sol punto comune, e sono per conseguenza tangenti l'una all'altra; allorchè la distanza dei loro centri è eguale alla somma od alla differenza dei loro raggi, allora i centri ed il punto di contatto sono in linea retta (b).

(a) Aggiungi *di una sfera* (Il Trad.)

(b) *A similitudine dei circoli, quando la distanza dei centri di due sfere è eguale alla somma dei loro raggi, allora le sfere sono tangenti esternamente; quando poi la distanza dei centri è eguale alla differenza dei raggi, allora le sfere sono tangenti internamente; o con più chiarezza, nel primo caso le due sfere sono tangenti colle loro*

PROPOSIZIONE VIII.

TEOREMA.

L' angolo che fanno tra loro due archi di circoli massimi è eguale all' angolo formato dalle tangenti di questi archi al punto dove essi formano l' angolo; dippiù esso angolo à pure per misura l' arco descritto da questo punto come polo fra gli stessi due archi di circoli massimi, prolungati s' è necessario.

Fig.226. Sia l' angolo BAC (*fig.* 226) che fanno tra loro i due archi di circoli massimi AB, AC; dico che è eguale all'angolo FAG formato dalle tangenti di questi archi nel punto A; e dippiù à per misura l'arco DE descritto dal punto A come polo fra i lati AB, AC, prolungati s' è necessario.

Infatti la tangente AF condotta nel piano dell'arco AB è perpendicolare al raggio AO; la tangente AG condotta nel piano dell' arco AC è perpendicolare allo stesso raggio AO. Dunque l' angolo FAG è eguale all' angolo dei piani OAB, OAC (*Prop.* 17, *lib.* V), che è quello degli archi AB, AC, e che s' indica con BAC.

Similmente, se l' arco AD è eguale ad un quadrante, come pure AE, le linee OD, OE saranno perpendicolari ad AO, e l' angolo DOE sarà pure eguale all' angolo dei piani AOD, AOE; dunque l' arco DE è la misura dell'angolo di questi piani, ossia la misura dell' angolo CAB. Quindi *l'angolo che fanno tra loro* etc. C.B.D.

Corollario. Gli angoli dei triangoli sferici possono paragonarsi fra loro per mezzo degli archi di circoli massimi descritti dai loro vertici come poli e compresi fra i loro

convessità; nel secondo la concavità della maggiore tocca la convessità della minore: in questi due casi, come si è osservato, i centri ed il punto di contatto sono in una linea retta.

È evidente dippiù che se la distanza dei centri è maggiore della somma dei raggi, le due sfere non s' intersegano nè si toccano, ma sono distanti l' una dall'altra e viceversa. E che se la distanza dei centri è minore della differenza dei raggi, cioè se il raggio maggiore è più grande della somma del raggio minore e della distanza dei centri, la sfera maggiore racchiuderà la minore e viceversa. (Il Trad.)

lati; così è facile fare un angolo eguale ad un angolo dato.

Scolio. Gli angoli opposti al vertice, tali come ACO, BCN (*fig. 238*) sono eguali; poichè l'uno o l'altro è sempre l'angolo formato dai due piani ACB, OCN. Fig. 238.

Si vede ancora che nell'incontro dei due archi ACB, OCN, i due angoli adiacenti ACO, OCB, presi insieme, equivalgono sempre a due angoli retti.

PROPOSIZIONE IX.

TEOREMA.

Essendo dato un triangolo sferico, se dai vertici di esso come poli si descrivano archi che formano altro triangolo sferico, reciprocamente i tre vertici di quest' ultimo saranno i poli dei lati del primo triangolo.

Sia dato il triangolo sferico ABC (*fig. 227*), se dai punti A, B, C, come poli, si descrivano gli archi EF, FD, DE che formino il triangolo sferico DEF; dico che reciprocamente i tre punti D, E, F saranno i poli dei lati BC, AC, AB. Fig. 227.

Infatti, essendo il punto A il polo dell' arco EF, la distanza AE è un quadrante; il punto C essendo il polo dell' arco DE, la distanza CE è parimente un quadrante; dunque il punto E è lontano un quadrante da ciascuno dei punti A e C; dunque esso è il polo dell' arco AC (*Prop. 6, Corol. 3*). Si dimostrerà similmente che D è il polo dell' arco BC, ed F quello dell' arco AB. Quindi *essendo dato* etc. C. B. D.

Corollario. Dunque il triangolo ABC può essere descritto per mezzo di DEF, come DEF per mezzo di ABC.

PROPOSIZIONE X.

TEOREMA.

Poste le medesime cose del teorema precedente (a), *ciascun angolo di uno dei triangoli avrà per misura la mezza circonferenza, meno il lato opposto nell' altro triangolo.*

Fig. 227. Essendo dato il triangolo sferico ABC (*fig.* 227) se dai punti A, B, C come poli si descrivano gli archi DE, EF, FD che formino il triangolo sferico DEF; dico primieramente che

l' angolo A à per misura $\frac{1}{2}$ *circ.* — EF,

l' angolo B à per misura $\frac{1}{2}$ *circ.* — DF,

l' angolo C à per misura $\frac{1}{2}$ *circ.* — DE.

Prolunghinsi se è necessario i lati AB, AC finchè incontrino EF in G ed H; poichè il punto A è il polo dell' arco GH, l' angolo A avrà per misura l' arco GH. Ma l' arco EH è un quadrante come pure GF, giacchè E è il polo di AH, ed F il polo di AG; dunque EH + GF equivale ad una mezza circonferenza. Ora EH + GF è lo stesso che EF + GH; dunque l' arco GH che misura l' angolo A è eguale ad una semicirconferenza meno il lato EF; parimente l' angolo B avrà per misura $\frac{1}{2}$ *circ.* — DF, e l' angolo C avrà per misura $\frac{1}{2}$ *circ.* — DE.

Questa proprietà dev' essere reciproca fra i due trian-

(a) Cioè: *Essendo dato un triangolo sferico, se dai vertici di esso come poli si descrivano archi che formino altro triangolo sferico, ciascuno angolo etc.* (il resto come sopra). (Il Trad.)

goli, poichè essi descrivonsi nella medesima maniera l'uno per mezzo dell'altro. Così troveremo che gli angoli D, E, F del triangolo DEF ànno per misura respettivamente la mezza circonferenza meno il lato opposto nell'altro triangolo, cioè :

l' angolo D à per misura $\frac{1}{2}$ *circ.* — BC,

l' angolo E à per misura $\frac{1}{2}$ *circ.* — AC ,

l' angolo F à per misura $\frac{1}{2}$ *circ.* — AB.

Infatti l'angolo D, per esempio, à per misura l' arco MI ; ora $MI + BC = MC + BI = \frac{1}{2}$ *circ.* ;

dunque l'arco MI, misura dell'angolo D, $= \frac{1}{2}$ *circ.* — BC; e così degli altri. Dunque *poste le medesime cose* etc. C. B. D.

Scolio. È necessario osservare che oltre il triangolo DEF (*fig. 228*) se ne potrebbero formare tre altri mediante l'intersezione dei tre archi DE, EF, DF. Ma la proposizione attuale non à luogo che pel triangolo centrale, che è distinto dagli altri tre, in ciò che i due angoli A e D (*fig. 227*) sono situati da una medesima parte di BC, i due B ed E da una medesima parte di AC , ed i due C ed F da una medesima parte di AB.

Fig. 228. Fig. 227.

Si danno differenti nomi ai due triangoli ABC, DEF; noi li chiameremo *triangoli polari*.

PROPOSIZIONE XI.

LEMMA.

Fig. 229. *Essendo dato il triangolo ABC* (fig. 229), *se dal polo A coll' intervallo AC si descriva l' arco di cerchio minore DEC; se dal polo B e coll' intervallo BC si descriva parimente l' arco DFC; e dal punto D, ove gli archi DEC, DFC si taglino, si conducano gli archi di cerchio massimo AD, DB; dico che il triangolo ADB così costrutto avrà le sue parti eguali a quelle del triangolo ACB.*

Infatti, per costruzione, il lato AD=AC, DB=BC, AB è comune; dunque questi due triangoli ànno i lati respettivamente eguali.

Dico ora che gli angoli opposti ai lati eguali sono eguali.

Infatti, se il centro della sfera è supposto in O, può concepirsi un angolo solido formato al punto O dai tre angoli piani AOB, AOC, BOC; può concepirsi similmente un secondo angolo solido formato dai tre angoli piani AOB, AOD, BOD. E poichè i lati del triangolo ABC sono eguali a quelli del triangolo ADB, ne segue gli angoli piani che formano uno di questi angoli solidi sono eguali agli angoli piani che formano l' altro angolo solido respettivamente; ma in tal caso è stato dimostrato (*Prop. 23, lib. V*) che i piani nei quali sono gli angoli eguali sono egualmente inclinati fra loro; dunque gli angoli del triangolo sferico DAB sono eguali a quelli del triangolo CAB, cioè DAB=BAC, DBA=ABC, ADB=ACB; dunque i lati e gli angoli del triangolo ADB sono eguali ai lati ed agli angoli del triangolo ACB.

Scolio. L' eguaglianza di questi triangoli non è però una eguaglianza assoluta o di soprapposizione, perchè sarebbe impossibile di applicarli l' uno sopra l'altro esattamente, a meno che non fossero isosceli. L' eguaglianza della quale trattasi è quella che già abbiamo chiamata *eguaglianza per simmetria*; e per questa ragione chiameremo i triangoli ACB, ADB *triangoli simmetrici.*

PROPOSIZIONE XII.

TEOREMA.

Due triangoli situati sopra la medesima sfera o sopra sfere eguali sono eguali in tutte le loro parti, quando ànno un angolo eguale adiacente a due lati eguali respettivamente.

Sia dei due triangoli dati ABC, EFG (*fig.* 230) situati sopra la medesima sfera o sfere eguali il lato AB=EF, il lato AC=EG, e l'angolo BAC=FEG; dico che questi triangoli sono eguali in tutte le loro parti. Fig. 230.

Il triangolo EFG potrà essere situato sopra il triangolo ABC o sul suo simmetrico ABD, nella stessa maniera si soprappongono due triangoli rettilinei che ànno un angolo eguale compreso fra lati eguali. Dunque tutte le parti del triangolo EFG saranno eguali a quelle del triangolo ABC, vale a dire che oltre le tre parti che si sono supposte eguali, si avrà il lato BC=FG, l'angolo ABC=EFG, l'angolo ACB=EGF. Dunque *due triangoli situati* etc. C. B. D.

PROPOSIZIONE XIII.

TEOREMA.

Due triangoli situati sopra la medesima sfera o sopra sfere eguali sono eguali in tutte le loro parti, quando ànno un lato eguale adiacente a due angoli respettivamente eguali.

Siano i due triangoli ABC, EFG (*fig.* 230) situati sopra la medesima sfera o sfere eguali, il lato BC=FG, l' angolo ABC=EFG, l' angolo ACB=EGF; dico che questi triangoli sono eguali in tutte le loro parti. Fig. 230.

Infatti uno di questi triangoli può essere situato sopra l' altro o sul suo simmetrico, come si fa nel caso simile dei triangoli rettilinei. (*Vedasi la prop. 7, lib. I*). Quindi *due triangoli situati* etc. C. B. D.

PROPOSIZIONE XIV.

TEOREMA.

Se due triangoli situati sulla medesima sfera e sopra sfere eguali sono equilateri fra loro, saranno anche equiangoli, e gli angoli eguali saranno opposti ai lati eguali.

Fig. 229. Ciò è manifesto per la proposizione XI (*fig. 229*), ove si è osservato che con tre lati dati AB, AC, BC non si possono fare che due triangoli ABC, ABD differenti in quanto alla posizione delle parti, ma eguali in quanto alla grandezza delle medesime parti. Dunque due triangoli equilateri fra loro sono od assolutamente eguali od almeno eguali per simmetria; nell'uno e nell' altro caso essi sono equiangoli, e gli angoli eguali sono opposti ai lati eguali. Dunque *se due triangoli* etc. C. B. D.

PROPOSIZIONE XV.

TEOREMA.

In ogni triangolo sferico isoscele gli angoli opposti ai lati eguali sono eguali; e reciprocamente, se due angoli di un triangolo sferico sono eguali, il triangolo sarà isoscele.

Fig. 231. Sia il triangolo sferico isoscele ABC (*fig. 231*), cioè il lato AB=AC; 1.° dico che si avrà l' angolo C=B.

Infatti se dal vertice A al punto D medio della base, si conduca l'arco AD, i due triangoli ABD, ADC, avranno i tre lati respettivamente eguali, cioè AD comune, BD=DC, AB=AC; dunque pel teorema precedente, questi triangoli avranno gli angoli eguali, e si avrà B=C.

2.° Sia l'angolo B=C; dico che si avrà AC=AB.

Infatti se il lato AB non è eguale ad AC, sia AB il maggiore di essi; prendasi BO=AC, e congiungasi OC. I due lati BO, BC sono eguali ai due lati AC, BC; l'angolo compreso dai primi OBC è eguale all'angolo compreso dai secondi ACB. Dunque i due triangoli BOC, ACB ànno le altre parti eguali (*Prop. 12*), e si à l'angolo OCB = ABC; ma l' angolo ABC = ACB per ipotesi; dunque si avrebbe OCB = ACB; il che è impossibile; dunque non

si può supporre AB differente da AC; dunque i lati AB, AC opposti agli angoli eguali C e B sono eguali. Quindi *in ogni triangolo sferico* etc. C. B. D.

Scolio. La medesima dimostrazione prova che l'angolo BAD = DAC, e l' angolo BDA = ADC. Dunque questi ultimi sono retti; dunque *l' arco condotto dal vertice di un triangolo sferico isoscele alla metà della sua base è perpendicolare a questa base, e divide l'angolo al vertice in due parti eguali.*

PROPOSIZIONE XVI.

TEOREMA.

In un triangolo sferico se un angolo è maggiore di un altro, il lato opposto all' angolo maggiore è maggiore del lato opposto all' angolo minore; reciprocamente se un lato è maggiore di un altro, l' angolo che si oppone al lato maggiore è maggiore dell' angolo che si oppone al lato minore (a).

I.° Sia nel triangolo sferico ABC (*fig. 232*) l'angolo A maggiore dell'angolo B; dico che il lato BC opposto all' angolo A sarà maggiore del lato AC opposto all'angolo B. Fig. 232.

Facciasi l'angolo BAD=B, si avrà AD=DB (*Prop. 15*); ma AD + DC è maggiore di AC, mettendo BD in vece di AD, si avrà DB + DC o BC > AC.

II.° Se si supponga BC > AC; dico che l'angolo BAC sarà maggiore di ABC.

Infatti se BAC fosse eguale ad ABC, si avrebbe BC= AC; e se fosse BAC < ABC, ne seguirebbe secondo ciò che si è dimostrato che si à BC < AC; ciò che è contro la supposizione. Dunque debb' essere l'angolo BAC > di ABC. Quindi *in un triangolo sferico* etc. C. B. D.

(a) Questo enunciato può ridursi per brevità al seguente:

In ogni triangolo sferico al maggior angolo si oppone il maggior lato e viceversa. (Il Trad.)

PROPOSIZIONE XVII.

TEOREMA.

Se due lati di un triangolo sferico sono eguali a due lati di altro triangolo sferico descritto sopra una sfera eguale, e se nello stesso tempo l' angolo è maggiore dell' angolo che è compreso dai lati eguali, sarà il terzo lato del primo triangolo maggiore del terzo lato del secondo triangolo.

Fig. 233. Se i due lati AB, AC (*fig. 233*) del triangolo sferico ABC sono eguali ai due lati DE, DF del triangolo DEF descritto sopra una sfera eguale; se nello stesso tempo l' angolo A è maggiore dell' angolo D; dico che il terzo lato BC del primo triangolo sarà maggiore del terzo EF del secondo.

La dimostrazione è assolutamente simile a quella della proposizione X del libro I.

PROPOSIZIONE XVIII.

TEOREMA.

Se due triangoli descritti sulla medesima sfera o sopra sfere eguali sono equiangoli fra loro, essi saranno pure equilateri.

Siano A e B i due triangoli dati, P e Q i loro triangoli polari. Poichè gli angoli sono eguali nei triangoli A e B, i lati saranno eguali nei polari P e Q (*Prop. 10*); ma dall'essere i triangoli P e Q equilateri fra loro, ne segue che sono ancora equiangoli (*Prop. 11*). Finalmente dall' essere eguali gli angoli ne' triangoli P e Q, ne segue (*Prop. 10*) che i lati sono eguali nei loro polari A e B. Dunque i triangoli equiangoli A e B sono nel medesimo tempo equilateri tra loro.

Si può ancor dimostrare la medesima proposizione senza il soccorso dei triangoli polari nella maniera seguente.

Fig. 234. Siano ABC, DEF (*fig. 234*) due triangoli equiangoli fra loro, di modo che sia $A=D$, $B=E$, $C=F$; dico che si avrà il lato $AB=DE$, $AC=DF$, $BC=EF$.

Sul prolungamento dei lati AB, AC prendasi AG =

DE, ed AH=DF ; tirisi GH e prolunghinsi gli archi BC, GH finchè s' incontrino in I e K.

I due lati AG, AH sono per costruzione eguali ai due DF, DE; l'angolo compreso GAH=BAC=EDF; dunque (*Prop. 12*) i triangoli AGH, DEF sono eguali in tutte le loro parti; dunque l'angolo AGH=DEF=ABC, e l'angolo AHG=DFE=ACB.

Nei triangoli IBG, KBG il lato BG è comune, l'angolo IGB=GBK; e poichè IGB+BGK è eguale a due retti, come pure GBK+IBG, ne segue che BGK=IBG. Dunque i triangoli IBG, GBK sono eguali (*Prop. 13*); dunque IG=BK, ed IB=GK.

Similmente, dall'essere l'angolo AHG=ACB, si conchiuderà che i triangoli ICH, HCK ànno un lato eguale adiacente a due angoli eguali; dunque sono eguali; quindi IH=CK, ed HK=IC.

Adesso, se dagli eguali BK, IG si tolgano gli eguali CK, IH, i residui BC, GH saranno eguali. D'altronde l'angolo BCA=AHG, e l'angolo ABC=AGH. Dunque i triangoli ABC, AHG ànno un lato eguale adiacente a due angoli eguali; dunque sono eguali: ma il triangolo DEF è eguale in tutte le sue parti al triangolo AHG; dunque esso è eguale ancora al triangolo ABC, e si avrà AB=DE, AC=DF, BC=EF; dunque, *se due triangoli sferici sono equiangoli fra loro, i lati opposti agli angoli eguali saranno eguali*. C. B. D.

Scolio. Questa proposizione non à luogo nei triangoli rettilinei, ove dall'eguaglianza degli angoli non si può dedurre altro che la proporzionalità dei lati. Ma è facile di render conto della differenza che si trova a questo riguardo tra i triangoli rettilinei ed i triangoli sferici. Nella proposizione presente, come pure nelle proposizioni XII, XIII, XIV e XVII, ove si tratta del paragone dei triangoli, si dice espressamente che questi triangoli son descritti sulla medesima sfera o sopra sfere eguali. Ora gli archi simili sono proporzionali ai raggi; dunque sopra sfere eguali due triangoli non possono esser simili senza essere eguali. Non fa maraviglia dunque che l'eguaglianza degli angoli porta seco l'eguaglianza dei lati.

Sarebbe altrimenti se i triangoli fossero descritti sopra sfere diseguali: allora essendo eguali gli angoli, i triangoli sarebbero simili, ed i lati omologhi sarebbero fra loro come i raggi delle sfere.

PROPOSIZIONE XIX.

TEOREMA.

La somma degli angoli di ogni triangolo sferico è minore di sei e maggiore di due angoli retti.

Infatti 1.° ciascun angolo di un triangolo sferico è minore di due angoli retti (*vedasi lo scolio seguente*); dunque *la somma dei tre angoli è minore di sei angoli retti.*

2.° La misura di ciascun angolo d' un triangolo sferico è eguale alla semicirconferenza, meno il lato corrispondente del triangolo polare (*Prop. 10*) ; dunque la somma dei tre angoli à per misura tre semicirconferenze, meno la somma dei lati del triangolo polare. Ora quest' ultima somma è minore di una circonferenza (*Prop. 4*); dunque , togliendola da tre semicirconferenze , il resto sarà maggiore di una semicirconferenza che è la misura di due angoli retti ; dunque 2.° *la somma dei tre angoli di un triangolo sferico è maggiore di due angoli retti.* C. B. D.

Corollario I. La somma degli angoli di un triangolo sferico non è costante come quella dei triangoli rettilinei ; essa varia da due angoli retti fino a sei, senza poter essere eguale nè all' uno nè all' altro limite. Quindi è , che due angoli dati non fan conoscere il terzo.

Corollario II. Un triangolo sferico può avere due o tre angoli retti , due o tre angoli ottusi.

Fig. 235. Se il triangolo NBC (*fig. 235*) è *bi-rettangolo*, cioè se à due angoli retti B e C, il vertice A sarà il polo della base BC (*Prop. 6*), ed i lati AB, AC saranno quadranti.

Se inoltre l'angolo A è retto, il triangolo ABC sarà *tri-rettangolo*, i suoi angoli saranno tutti retti ed i suoi lati quadranti. Il triangolo *tri-rettangolo* è contenuto otto volte nella superficie della sfera, ciò si vede per mezzo Fig. 236. della figura 236 , supponendo l' arco MN eguale ad un quadrante.

Scolio. Abbiamo supposto in tutto ciò che precede, e conformemente alla definizione VI, che i triangoli sferici ànno i loro lati sempre minori della semicirconferenza ; allora ne segue che gli angoli sono sempre minori di due angoli retti ; perchè se il lato AB è minore della semicir-Fig. 224. conferenza, come pure (*fig. 224*) AC, questi archi deb-

bono essere prolungati ambidue per incontrarsi in D. Ora i due angoli ABC, CBD presi insieme equivalgono due angoli retti; dunque l'angolo ABC solo è minore di due angoli retti.

Si osserverà però che esistono triangoli sferici, cui certi lati sono maggiori della semicirconferenza, e certi angoli maggiori di due angoli retti. Infatti, se si prolunghi il lato AC in una circonferenza intera ACE, ciò che resta, togliendo dalla semisfera il triangolo ABC, è un nuovo triangolo che si può ancora indicare con ABC, ed i cui lati sono AB, BC, AEDC. Si vede dunque che il lato AEDC è maggiore della semicirconferenza AED; ma nel medesimo tempo l'angolo opposto in B supera due angoli retti della quantità CBD.

Del resto si sono esclusi dalla definizione i triangoli, i cui lati ed angoli sono si grandi, perchè la loro risoluzione o la determinazione delle loro parti si riduce sempre a quella dei triangoli compresi nella definizione. Infatti si vede facilmente che se si conoscono gli angoli ed i lati del triangolo ABC, si conosceranno immediatamente gli angoli ed i lati del triangolo del medesimo nome che è il resto della semisfera.

PROPOSIZIONE XX.

TEOREMA.

Un fuso sta alla superficie della sfera come l'angolo di questo fuso sta a quattro angoli retti, o come l'arco che misura questo angolo sta alla circonferenza.

Sia il fuso AMBNA (*fig. 236*); dico che questo fuso sta alla superficie della sfera, come l'angolo MAN di questo fuso sta a quattro angoli retti, o come l'arco MN che misura questo angolo sta alla circonferenza. Fig. 236.

Suppongasi primieramente che l'arco MN stia alla circonferenza MNPQ come 5 sta a 48. Si dividerà la circonferenza MNPQ in 48 parti eguali, delle quali MN ne conterrà 5; congiungendo poi il polo A ed i punti di divisione con altrettanti quarti di circonferenza, si avranno 48 triangoli nella semisfera AMNPQ, i quali saranno tutti eguali fra loro, poichè avranno tutte le loro parti eguali. La sfera intiera conterrà dunque 96 di questi triangoli parziali,

ed il fuso AMBNA ne conterrà 10; dunque il fuso sta alla sfera come 10 sta a 96, o come 5 sta a 48, cioè come l'arco MN sta alla circonferenza.

Se l'arco MN non è commensurabile alla circonferenza, si dimostrerà collo stesso ragionamento, cui si sono già veduti molti esempi, che il fuso sta sempre alla superficie della sfera come l'arco MN sta alla circonferenza.

Corollario I. Due fusi stanno fra loro come i loro angoli respettivi.

Corollario II. Si è già veduto che la superficie intera della sfera è eguale ad otto triangoli tri-rettangoli (*Prop. 19*); dunque se l'area di uno di questi triangoli è presa per l'unità, la superficie della sfera sarà rappresentata da 8. Ciò posto, la superficie del fuso, il cui angolo è A, sarà espressa da 2 A (se tutte le volte l'angolo A è valutato prendendo l'angolo retto per unità); poichè si à

$$2A : 8 :: A : 4.$$

Vi sono qui dunque due unità differenti; l'una per gli angoli che è l'angolo retto, l'altra per le superficie, cioè il triangolo sferico tri-rettangolo, ossia quello i cui angoli sono tutti retti, ed i lati sono quarte parti della circonferenza.

Scolio. L'unghia sferica compresa fra i piani AMB, ANB sta al solido intiero della sfera come l'angolo A sta a quattro angoli retti. Poichè essendo eguali i fusi, le unghie sferiche saranno similmente eguali; dunque due unghie sferiche stanno fra loro come gli angoli formati dai piani che li comprendono.

PROPOSIZIONE XXI.

TEOREMA.

Due triangoli sferici simmetrici sono eguali in superficie.

Fig. 237. Siano ABC, DEF (*fig. 237*) due triangoli sferici simmetrici, cioè due triangoli che ànno i lati eguali, cioè AB = DE, AC = DF, CB = FE, e che frattanto non potrebbero essere sopraposti; dico che la superficie ABC è eguale alla superficie DEF.

Sia P il polo del piccolo circolo che passerebbe per

i tre punti A, B, C (*a*); da questo punto siano condotti gli archi eguali (*Prop. 6*) PA, PB, PC; al punto F facciasi l'angolo DFQ = ACP, l'arco FQ = CP, e congiungansi DQ, EQ.

I lati DF, FQ sono eguali ai lati AC, CP; l'angolo DFQ = ACP; dunque i due triangoli DFQ, ACP sono eguali in tutte le loro parti (*Prop. 12*); dunque il lato DQ = AP, e l'angolo DQF = APC.

Nei triangoli proposti ABC, DEF, gli angoli DFE, ACB, opposti ai lati eguali DE, AB, essendo eguali (*Prop. 11*), se si tolgano gli angoli DFQ, ACP, eguali per costruzione, resterà l'angolo QFE eguale a PCB. D'altronde i lati QF, FE sono eguali ai lati PC, CB; dunque i due triangoli FQE, CPB sono eguali in tutte le loro parti; dunque il lato QE = PB, e l'angolo FQE = CPB.

Se si osservi adesso che i triangoli DFQ, ACP che ànno i lati respettivamente eguali sono nel medesimo tempo isosceli, si vedrà che posson essere soprapposti l'uno all'altro; infatti, avendo situato PA sopra il suo eguale QD, il lato PC cadrà sopra il suo eguale QF, e così i due triangoli si confonderanno in un solo; dunque sono eguali; dunque la superficie DQF = APC. Per una simil ragione la superficie FQE = CPB, e la superficie DQE = APB; dunque si à DQF + FQE — DQE = APC + CPB — APB; ovvero DFE = ABC; dunque i due triangoli simmetrici ABC, DEF sono eguali in superficie. Quindi *due triangoli sferici* etc. C. B. D.

Scolio. I poli P e Q potrebbero essere situati dentro i triangoli ABC, DEF; allora bisognerebbe aggiungere i tre triangoli DQF, FQE, DQE affin di comporne il triangolo DEF, e similmente bisognerebbe aggiungere i tre triangoli APC, CPB, APB per comporne il triangolo ABC; d'altronde la dimostrazione e la conclusione sarebbero sempre le stesse.

(a) *Il circolo che passa per i tre punti A, B, C, o che è circoscritto al triangolo ABC, non può essere che un circolo piccolo della sfera; poichè, se fosse un circolo massimo, i tre lati AB, BC, AC sarebbero situati in un medesimo piano, ed il triangolo ABC si ridurrebbe ad uno dei suoi lati.*

PROPOSIZIONE XXII.

TEOREMA.

Se due circoli massimi si taglino comunque in un emisfero, la somma di due triangoli opposti sarà eguale al fuso che à per angolo l' angolo corrispondente formato dalla intersezione degli stessi circoli.

Fig. 238. Siano i due circoli massimi AOB, COD (*fig. 238*) che si taglino comunque nell' emisfero AOCBD ; dico che la somma dei triangoli opposti AOC , BOD è eguale al fuso, il cui angolo è BOD.

Infatti, prolungando gli archi OB, OD nell' altro emisfero fino all' incontro in N, OBN sarà una mezza circonferenza , come pure AOB ; togliendo da ambe le parti OB, si avrà BN = AO. Per una simil ragione si à DN= CO , e BD = AC ; dunque i due triangoli AOC , BDN ànno i tre lati eguali ; d' altronde la loro posizione è tale che sono fra loro simmetrici respettivamente ; dunque sono eguali in superficie (*Prop. 21*) , e la somma dei triangoli AOC, BOD è equivalente alla somma dei triangoli BOD , BDN, ovvero al fuso OBNDO, il cui angolo è BOD. Dunque *se due circoli massimi* etc. C. B. D.

Scolio. È chiaro pure che le due piramidi sferiche che ànno per basi i triangoli AOC , BOD prese insieme equivalgono all' unghia sferica, il cui angolo è BOD.

PROPOSIZIONE XXIII.

TEOREMA.

La superficie di un triangolo sferico qualunque à per misura l' eccesso della somma dei suoi tre angoli sopra due angoli retti.

Fig. 239. Sia ABC (*fig. 239*) il triangolo sferico proposto ; dico che la sua superficie à per misura l' eccesso della somma dei suoi tre angoli ABC , BCA , CAB sopra due angoli retti.

Prolunghinsi i suoi lati finchè incontrino il circolo mas-

simo DEFG, condotto a piacimento fuori del triangolo. In virtù del teorema precedente, i due triangoli ADE, AGH, presi insieme, equivalgono al fuso, il cui angolo è A, e che à per misura 2 A (*Prop. 20*); così si avrà

$$ADE + AGH = 2A\ ;$$

per una simile ragione

$$BGF + BID = 2B\ ,$$

$$CIH + CFE = 2C.$$

Ma la somma di questi sei triangoli eccede la semisfera di due volte il triangolo ABC, d' altronde la semisfera è rappresentata da 4; dunque

$$2ABC = 2A + 2B + 2C - 4\ ;$$

e per conseguenza

$$ABC = A + B + C - 2\ ;$$

dunque *ogni triangolo sferico à per misura la somma dei suoi angoli, meno due angoli retti.* C. B. D.

Corollario I. Quanti angoli retti vi saranno in tal misura, altrettanti triangoli tri-rettangoli od ottave parti di sfera, ciascuna delle quali è l' unità di superficie (*Prop. 20*), saranno contenute nel triangolo proposto. Per esempio, se gli angoli sono eguali ciascuno a $\frac{3}{4}$ di un angolo retto, allora i tre angoli varranno 4 angoli retti, ed il triangolo proposto sarà rappresentato da 4 — 2, ovvero 2; dunque sarà eguale a due triangoli tri-rettangoli od al quarto della superficie della sfera.

Corollario II. Il triangolo sferico ABC è equivalente al fuso, il cui angolo è $\frac{A + B + C}{2} - 1$; similmente la piramide sferica, la cui base è ABC, equivale all' unghia sferica, il cui angolo è $\frac{A + B + C}{2} - 1$.

Scolio. Nello stesso tempo che si paragona il triangolo sferico ABC al triangolo tri-rettangolo, la piramide sferica che à per base ABC si paragona colla piramide

tri-rettangola, e ne resulta la medesima proporzione. L'angolo solido al vertice della piramide si paragona similmente con l' angolo solido al vertice della piramide tri-rettangola; infatti il paragone si stabilisce per la coincidenza delle parti. Ora, se le basi delle piramidi coincideranno, è evidente che anche le piramidi coincideranno, come pure gli angoli solidi al loro vertice. Da ciò più conseguenze ne resultano.

1.° Due piramidi triangolari sferiche stanno fra loro come le loro basi; e poichè una piramide poligona può dividersi in più piramidi triangolari, ne segue che due piramidi sferiche qualunque stanno fra loro come i poligoni che servono loro di basi.

2.° Gli angoli solidi al vertice delle stesse piramidi sono egualmente nella proporzione delle basi; dunque per paragonare due angoli solidi qualunque, bisogna situare i loro vertici al centro di due sfere eguali, e questi angoli solidi staranno fra loro come i poligoni sferici intercettati fra i loro piani o facce.

L'angolo al vertice della piramide tri-rettangola è formata da tre piani perpendicolari fra loro; quest'angolo che si può chiamare *angolo solido retto* è adattissimo per servire di unità di misura agli altri angoli solidi. Ciò posto, il medesimo numero che dà l' area di un poligono sferico, darà la misura dell' angolo solido corrispondente.

Per esempio se l' area di un poligono sferico è $\frac{3}{4}$, vale a dire se è $\frac{3}{4}$ del triangolo tri-rettangolo, l' angolo solido corrispondente sarà pure i $\frac{3}{4}$ dell'angolo solido retto.

PROPOSIZIONE XXIV.

TEOREMA.

La superficie di un poligono sferico à per misura la somma dei suoi angoli, meno il prodotto di due angoli retti per il numero dei lati del poligono meno due.

Sia il poligono sferico proposto ABCDE (*fig. 240*); Fig. 240. dico che la sua superficie à per misura la somma dei suoi angoli ABC, BCD, CDE, DEA, meno il prodotto di due angoli retti per il numero dei lati di esso poligono meno due.

Dal medesimo vertice A siano condotte a tutti gli altri vertici le diagonali AC, AD; il poligono ABCDE sarà diviso in tanti triangoli quanti i lati meno due. Ma la superficie di ciascun triangolo à per misura la somma dei suoi angoli meno due angoli retti, ed egli è chiaro che la somma di tutti gli angoli dei triangoli è eguale alla somma degli angoli del poligono; dunque la superficie del poligono è eguale alla somma dei suoi angoli, meno tante volte due angoli retti quanti lati à meno due. Quindi *la superficie di un* etc. C. B. D.

Scolio. Sia s la somma degli angoli di un poligono sferico, n il numero dei suoi lati; l'angolo retto essendo supposto l'unità, la superficie del poligono avrà per misura

$$s - 2(n - 2) \text{ ovvero } s - 2n + 4.$$

PROPOSIZIONE XXV.

TEOREMA.

Dato il numero degli angoli solidi di un poliedro, come pure il numero delle sue facce ed il numero delle sue costole; sarà sempre la somma del numero degli angoli solidi e del numero delle facce eguale al numero delle sue costole più due.

Sia S il numero degli angoli solidi di un poliedro, H il numero delle sue facce, A il numero delle sue costole; dico che si avrà sempre

$$S + H = A + 2.$$

Prendasi dentro il poliedro un punto, donde condurransi linee rette ai vertici di tutti i suoi angoli; immaginisi dipoi che dal medesimo punto, come centro, si descriva una superficie sfe-

rica che sia incontrata da tutte queste linee in altrettanti punti; congiungansi questi punti con archi di circoli massimi, in modo che si formino sulla superficie della sfera poligoni corrispondenti ed eguali in numero alle facce del poliedro. Sia ABCDE
Fig. 240. (*fig* 240) uno di questi poligoni, e sia n il numero dei suoi lati; la sua superficie sarà $s - 2n + 4$, essendo s la somma degli angoli A, B, C, D, E. Se si valuti similmente la superficie di ciascuno degli altri poligoni sferici e si sommino tutte insieme, se ne conchiuderà che la loro somma o la superficie della sfera rappresentata da 8 è eguale alla somma di tutti gli angoli dei poligoni, meno due volte il numero dei loro lati più 4 preso tante volte quante sono le facce. Ora siccome tutti gli angoli che si formano intorno ad un medesimo punto A equivalgono a quattro angoli retti, la somma di tutti gli angoli dei poligoni è eguale a 4 preso tante volte quanti angoli solidi vi sono; dessa è dunque eguale a 4S. Dippiù il doppio del numero dei lati AB, BC, CD, etc. è eguale al quadruplo del numero delle costole, ossia $= 4A$, giacchè la medesima costola serve di lato a due facce; dunque si avrà

$$8 = 4S - 4A + 4H;$$

ovvero, prendendo il quarto di ciascun membro,

$$2 = S - A + H;$$

dunque

$$S + H = A + 2.$$

Quindi *dato il numero degli* etc. C. B. D.

Corollario. Segue da ciò che *la somma degli angoli piani che formano gli angoli solidi di un poliedro è eguale a tante volte quattro angoli retti quante unità vi sono in* $S - 2$, *S essendo il numero degli angoli solidi del poliedro.*

Infatti se si consideri una faccia, il cui numero di lati sia n, la somma degli angoli di questa faccia sarà $2n - 4$ angoli retti. (*Prop.* 20, *lib. I*). Ma la somma di tutti i $2n$ od il doppio del numero dei lati di tutte le facce $= 4A$, e 4 preso tante volte quante sono le facce $= 4H$; dunque la somma degli angoli di tutte le facce $= 4A - 4H$. Ora pel teorema che abbiamo già dimostrato si à

$$A - H = S - 2,$$

e per conseguenza

$$4A - 4H = 4(S - 2),$$

Dunque *la somma degli angoli piani* etc.

PROPOSIZIONE XXVI.

TEOREMA.

Di tutti i triangoli sferici formati con due lati dati ed un terzo a piacimento, il massimo è quello nel quale l' angolo compreso fra i lati dati è eguale alla somma degli altri due.

Di tutti i triangoli sferici formati con due lati CB, CA (*fig.* 272 e 273) ed un terzo a piacimento; dico che il massimo è quello nel quale l'angolo C, compreso fra i due lati dati, è eguale alla somma degli altri due angoli A e B.

Fig. 272, 273.

Prolunghinsi i due lati AC, AB fino al loro incontro in D; si avrà un triangolo sferico BCD, nel quale l' angolo DBC sarà parimente eguale alla somma degli altri due angoli BDC, BCD; perchè BCD + BCA essendo eguale a due angoli retti, come pure CBA + CBD, si à BCD + BCA = CBA + CBD; aggiungendo ad ambe le parti BDC = BAC, si avrà BCD + BCA + BDC = CBA + CBD + BAC. Ora, per ipotesi, BCA = CBA + BAC; dunque CBD = BCD + BDC.

Conducasi BI che faccia l' angolo CBI = BCD, e per conseguenza IBD = BDC; i due triangoli IBC, IBD saranno isosceli e si avrà IC = IB = ID; dunque il punto I, medio di DC, è ad eguale distanza dai tre punti B, C, D; per una simile ragione, il punto O, medio di AB, sarà egualmente distante dai tre punti A, B, C.

Sia ora CA' = CA (*fig.* 272), e l' angolo BCA' > BCA; se si tirì A'B, e che si prolunghino gli archi A'C, A'B fino al loro incontro in D', l' arco D'CA' sarà una mezza circonferenza, come pure DCA; dunque poichè si à CA' = CA, si avrà ancora CD' = CD. Ma nel triangolo CID' si à CI + ID' > CD'; dunque ID' > CD − CI, ovvero ID' > ID.

Fig. 272.

Nel triangolo isoscele CIB dividasi l'angolo del vertice I in due parti eguali con l' arco EIF che sarà perpendicolare sulla metà di BC. Se si prenda un punto L tra I ed E, la distanza BL, eguale ad LC, sarà minore di BI, perchè si può dimostrare, come nella proposiz. IX del lib. I, che si à BL + LC < BI + IC; dunque, prendendo le metà da ambe le parti, si avrà BL < BI. Ma nel triangolo D'LC si à D'L > D'C − CL, e con più ragione D'L > DC − CI, ossia D'L > DI, o D'L > BI; dunque D'L > BL. Dunque se si cerchi sopra l'arco EIF un punto egualmente distante dai tre punti B, C, D', questo punto non potrebbe trovarsi che sul prolungamento di EI verso F. Sia I' il punto cercato, in modo che si abbia DI' = BI' = CI'; i triangoli I'CB, I'CD', I'BD' essendo isosceli, si avranno gli angoli eguali I'BC = I'CB, I'BD' = I'D'B, I'CD'

$=I'D'C$. Ma gli angoli $D'BC+CBA'$ equivalgono a due angoli retti, come ancora $D'CB+BCA'$; dunque

$$D'BI'+I'BC+CBA'=2,$$

$$BCI'-I'CD'+BCA'=2.$$

Addizionando le due somme, ed osservando che si à $I'BC=BCI'$ e $D'BI'-I'CD'=BD'I'-I'D'C=CD'B=CA'B$, si avrà

$$2I'BC+CA'B+CBA'+BCA'=4.$$

Dunque $CA'B+CBA'+BCA'-2$ (misura delle aree del triangolo $A'BC$) $=2-2\ I'BC$; di modo che si à *area* $A'BC=2-2$ *angolo* $I'BC$; similmente nel triangolo ABC si avrebbe *area* $ABC=2-2$ *angolo* IBC. Ora si è dimostrato che l' angolo $I'BC$ è maggiore di IBC; dunque l' area $A'BC$ è minore di ABC.

La medesima dimostrazione e la medesima conclusione avrebbero luogo se, prendendo sempre l' arco $CA'=CA$ (*fig.* 273), si facesse l' angolo $BCA'<BCA$; dunque ABC è il triangolo massimo tra tutti quelli che ànno due lati dati ed il terzo a piacimento. Quindi *di tutti i triangoli* etc. C. B. D.

Fig. 273.

Fig. 241. *Scolio I.* Il triangolo ABC (*fig.* 241), il massimo tra tutti quelli che ànno due lati dati CA, CB, può essere iscritto in un mezzo cerchio, cui la corda del terzo lato AB sarà il diametro; perchè O essendo il mezzo di AB, si è veduto che le distanze OC, OB sono eguali; dunque la circonferenza del cerchio picciolo descritto dal punto O, come polo, e con l' intervallo OB, passerà per i tre punti A, B, C. Di più la linea retta BA è un diametro di questo cerchio picciolo; poichè il centro che dee trovarsi ad un tempo nel piano di questo cerchio piccolo e nel piano dell' arco di cerchio massimo (*Prop.* 1, *Corol.* 4) BOA, si troverà necessariamente nella intersezione di questi due piani, ch'è la retta *BA*; e quindi *BA* sarà un diametro.

II. Nel triangolo ABC l' angolo C essendo eguale alla somma degli altri due A e B, ne segue che la somma dei tre angoli è doppia dell' angolo C. Ma questa somma è sempre maggiore di due angoli retti (*Prop.* 19); dunque l' angolo C è maggiore di un retto.

III. Se si prolunghino i lati CB, CA, finchè s' incontrino in E, il triangolo BAE sarà eguale al quarto della superficie della sfera. Poichè l'angolo $E=C=ABC+CAB$; dunque i tre angoli del triangolo BAE equivalgono ai quattro ABC, ABE, CAB, BAE, la cui somma è eguale a quattro angoli retti; dunque la superficie del triangolo $BAE=4-2=2$ (*Prop.* 24) che è il quarto della superficie della sfera.

IV. Non vi sarebbe luogo al *massimo* se la somma dei due lati dati CA, CB fosse eguale o maggiore di una mezza circonferenza di un cerchio massimo. Poichè, siccome il triangolo ABC dev' essere iscritto in un semicerchio della sfera, la somma dei due

lati CA, CB sarà minore della semicirconferenza BCA (*Prop.* 3), e per conseguenza minore della semicirconferenza di un cerchio massimo.

La ragione per la quale non vi è *massimo* quando la somma dei due lati dati è maggiore della semicirconferenza di un cerchio massimo si è, perchè allora il triangolo aumenta di più in più a misura che l'angolo compreso fra i lati dati è più grande; finalmente, quando questo angolo sarà eguale a due retti, i tre lati saranno in uno stesso piano e formeranno una circonferenza intera: il triangolo sferico diventerà dunque eguale alla semisfera, ma cesserà allora di essere triangolo.

PROPOSIZIONE XXVII.

TEOREMA.

Di tutti i triangoli sferici formati con un lato dato ed un perimetro dato, il massimo è quello in cui i due lati non determinati sono eguali.

Sia AB (*fig.* 242) il lato dato comune ai due triangoli ACB, ADB, e sia AC + CB = AD + DB; dico che il triangolo isoscele ACB, nel quale AC = CB, è maggiore del non-isoscele ADB Fig. 242.

Infatti, avendo questi triangoli la parte comune AOB, basta far vedere che il triangolo BOD è minore di AOC. L'angolo CBA eguale a CAB è maggiore di OAB; onde il lato AO è maggiore di OB (*Prop.* 16); prendasi OI = OB; facciasi OK = OD, e tirisi KI; il triangolo OKI sarà eguale a DOB (*Prop.* 21). Se si nega adesso che il triangolo DOB od il suo eguale KOI sia minore di OAC, bisognerà che sia eguale o maggiore; in ambidue i casi, siccome il punto I è fra i punti A ed O, bisognerà che il punto K sia sopra OC prolungato, senza di che il triangolo OKI sarebbe contenuto nel triangolo CAO, e perciò sarebbe minore. Ciò posto, essendo CA il più corto cammino da C ad A, si à CK + KI + IA > CA. Ma CK = OD — CO, AI = AO — OB, KI = BD; dunque OD — CO + AO — OB + BD > CA, e riducendo AD — CB + BD > CA od AD + BD > AC + CB. Ora questa diseguaglianza è contraria alla supposizione di AD + BD = AC + CB; dunque il punto K non può cadere sul prolungamento di OC; dunque cade fra O e C, e per conseguenza il triangolo KOI od il suo eguale ODB è minore di ACO; dunque il triangolo isoscele ACB è maggiore del non-isoscele ADB della medesima base e dello stesso perimetro. Dunque *di tutti i triangoli sferici* etc. C. B. D.

Scolio. Queste due ultime proposizioni sono analoghe alle proposizioni I e III dell'appendice al libro IV; laonde si possono dedurre per rapporto ai poligoni sferici le conseguenze che ànno luogo per i poligoni rettilinei.

Eccone le principali:

1.° *Di tutti i poligoni sferici isoperimetri e di un medesimo numero di lati il massimo è un poligono equilatero.*

La medesima dimostrazione che per la proposizione II dell' appendice al libro IV.

2.° *Di tutti i poligoni sferici formati con lati dati ed un ultimo a piacimento, il massimo è quello che si può iscrivere in un semicerchio, cui la corda del lato non determinato sarà il diametro.*

La dimostrazione si deduce dalla proposizione XXVI, come si è veduto nella proposizione IV dell' appendice citata; bisogna, perchè abbia luogo il *massimo*, che la somma dei lati dati sia minore della mezza-circonferenza di un cerchio massimo.

3.° *Il massimo dei poligoni sferici formati con lati dati è quello che si può iscrivere in un cerchio della sfera.*

La medesima dimostrazione che per la proposizione VI dell' appendice al libro IV.

4.° *Il massimo dei poligoni sferici che ànno lo stesso perimetro ed il medesimo numero di lati è quello che à i suoi angoli eguali ed i suoi lati eguali.*

Questo è ciò che resulta dai corollari 1.° e 3.° che precedono.

Nota. Tutte le proposizioni di *massimo* riguardanti i poligoni sferici si applicano agli angoli solidi, cui tali poligoni sono la misura.

APPENDICE

AI LIBRI VI E VII

I POLIEDRI REGOLARI

PROPOSIZIONE PRIMA

TEOREMA.

Non possono esservi che cinque poliedri regolari.

Infatti si sono definiti per *poliedri regolari* quelli dei quali tutte le facce sono poligoni regolari eguali, e che tutti gli angoli solidi sono eguali fra loro. Queste condizioni non ponno aver luogo se non che in un piccolo numero di casi.

1.° Se le facce sono triangoli equilateri, si può formare ciascun angolo solido del poliedro con tre angoli di questi triangoli o con quattro o con cinque ; quindi nascono tre corpi regolari che sono il tetraedro, l' ottaedro, l' icosaedro. Non se ne può formare un maggior numero con triangoli equilateri, poichè sei angoli di questi triangoli equivalgono a quattro angoli retti, e non possono formare un angolo solido (*Prop. 22, lib. V*).

2.° Se le facce sono quadrati, si possono riunire i loro angoli a tre a tre; e da ciò resulta l' esaedro o cubo.

Quattro angoli di quadrato equivalgono a quattro angoli retti, e non possono formare un angolo solido.

3.° Finalmente se le facce sono pentagoni regolari, si potranno pure riunire i loro angoli a tre a tre, e ne resulterà il dodecaedro regolare.

Non si può andare oltre , poichè tre angoli di esagoni regolari equivalgono a quattro angoli retti , e tre angoli di ottagoni valgono ancora di più.

Dunque *non si possono avere che cinque poliedri rego-*

lari, *tre formati con triangoli equilateri*, *uno con quadrati ed uno con pentagoni*. C. B. D.

Scolio. Si proverà nella proposizione seguente che questi cinque poliedri esistono realmente, e che se ne possono determinare tutte le dimensioni quando si conosca una delle loro facce.

PROPOSIZIONE II.

PROBLEMA.

Essendo data una delle facce di un poliedro regolare o soltanto il suo lato, *costruire il poliedro*.

Questo problema ne presenta cinque che si risolveranno successivamente.

PRIMO.

Costruzione del tetraedro.

Fig. 243. Sia ABC (*fig. 243*) il triangolo equilatero che debb' essere una delle facce del tetraedro; fa d' uopo costruire il tetraedro.

Dal punto O, centro di questo triangolo, innalzisi OS perpendicolare al piano ABC; terminisi questa perpendicolare al punto S, talmente che AS=AB; tirinsi SB, SC, e la piramide SABC sarà il tetraedro richiesto.

Infatti, a cagione delle distanze eguali OA, OB, OC, le obblique SA, SB, SC si allontanano egualmente dalla perpendicolare SO, e perciò sono eguali. Una di esse SA=AB; dunque le quattro facce della piramide SABC sono triangoli eguali al triangolo dato ABC. D' altronde gli angoli solidi di questa piramide sono eguali fra loro, poichè ciascuno di essi è formato con tre angoli piani eguali; dunque questa piramide è un tetraedro regolare.

Dunque *dato il triangolo equilatero*, *cioè una delle facce del tetraedro*, *si è costrutto il tetraedro*. C. B. F.

SECONDO.

Costruzione dell' esaedro.

Sia ABCD (*fig. 244*) un quadrato; fa d' uopo costruire l' esaedro. Fig. 244.

Sopra la base ABCD costruiscasi un prisma retto, la cui altezza AE sia eguale al lato AB. È chiaro che le facce di questo prisma sono quadrati eguali, e che i suoi angoli solidi sono eguali fra loro, giacchè vengono formati respettivamente con tre angoli retti; dunque questo prisma è un esaedro regolare od un cubo. Dunque *dato un quadrato si è costruito l'esaedro o cubo.* C.B.F.

TERZO.

Costruzione dell' ottaedro.

Sia AMB (*fig. 245*) un triangolo equilatero dato; fa d' uopo costruire l' ottaedro. Fig. 245.

Sul lato AB descrivasi il quadrato ABCD; dal punto O, centro di questo quadrato, alzisi sul suo piano la perpendicolare TS, terminata dalle due parti in T ed in S, talmente che OT=OS=AO; tirinsi dipoi SA, SB, TA, etc.; si avrà un solido SABCDT composto di due piramidi quadrangolari SABCD, TABCD addossate colla loro base comune ABCD; questo solido sarà l' ottaedro regolare cercato.

Infatti il triangolo AOS è rettangolo in O, come ancora il triangolo AOD; i lati AO, OS, OD sono eguali; dunque questi triangoli sono eguali; dunque AS=AD. Si dimostrerà parimente che tutti gli altri triangoli rettangoli AOT, BOS, COT, etc. sono eguali al triangolo AOD; dunque tutti i lati AB, AS, AT, etc. sono eguali fra loro, e per conseguenza il solido SABCDT è compreso da otto triangoli eguali al triangolo equilatero dato ABM. Dico di più, che gli angoli solidi del poliedro sono eguali fra loro; per esempio, l' angolo S è eguale all'angolo B.

Infatti è manifesto che il triangolo SAC è eguale al triangolo DAC, e che perciò l'angolo ASC è retto; dunque la figura SATC è un quadrato eguale al quadrato ABCD. Ma, se si paragoni la piramide BASCT colla piramide SABCD, la base ASCT della prima può situarsi sulla base

ABCD della seconda; allora, essendo il punto O un centro comune, l'altezza OB della prima coinciderà con l'altezza OS della seconda, e le due piramidi si confonderanno in una sola; dunque l' angolo solido S è eguale all' angolo solido B; dunque il solido SABCDT è un ottaedro regolare. Quindi *dato il triangolo equilatero si è costruito l' ottaedro*. C. B. F.

Scolio. Se tre rette eguali AC, BD, ST sieno perpendicolari fra loro e si taglino nel loro mezzo, le estremità di queste rette saranno i vertici di un ottaedro regolare.

QUARTO.

Costruzione del dodecaedro.

Fig. 246. Sia ABCDE (*fig. 246*) un pentagono regolare dato; fa d' uopo costruire il dodecaedro.

Siano ABP, CBP due angoli piani eguali all'angolo ABC; con questi angoli piani formisi l'angolo solido B e determinisi per la proposizione XXIV del libro V la inclinazione scambievole di due di questi piani, inclinazione che chiamisi K. Forminsi similmente ai punti C, D, E, A angoli solidi eguali all' angolo solido B e situati nella stessa maniera: il piano CBP sarà lo stesso che il piano BCG, poichè sono inclinati l'uno e l'altro della medesima quantità K sul piano ABCD. Si può dunque nel piano PBCG descrivere il pentagono BCGFP eguale al pentagono ABCDE. Se si fa lo stesso in ciascuno degli altri piani CDI, DEL etc., si avrà una superficie convessa PFGK etc. composta di sei pentagoni regolari eguali ed inclinati ciascuno sul suo adiacente della medesima quantità K. Sia *pfgh* etc. una seconda superficie eguale a PFGH etc.; dico che queste due superficie possono essere riunite in tal modo da formare una sola superficie convessa continua. Infatti l'angolo *opf*, per esempio, può unirsi ai due angoli OPB, BPF per fare un angolo solido P eguale all'angolo B; ed in questa riunione non si cambierà nulla l' inclinazione dei piani BPF, BPO, giacchè questa inclinazione è quell' appunto che bisogna per la formazione dell' angolo solido. Ma, nel tempo stesso che si forma l'angolo solido P, il lato *pf* si applicherà sul suo eguale PF; e nel punto F si troveranno riuniti tre angoli piani PFG, *pfe*, *efg* che formeranno un angolo solido eguale a ciascuno degli angoli già formati:

questa riunione farassi senza cambiar nulla lo stato dell'angolo P, nè quello della superficie *efgh*, etc., poichè i piani PFG, *efp*, digià riuniti in P, ànno fra loro la inclinazione convenevole K, come pure i piani *efg*, *efp*. Continuando così di mano in mano si vede chiaro che le due superficie si aggiusteranno scambievolmente l'una coll'altra, per non formare che una sola superficie continua e rientrante in sè stessa: questa superficie sarà quella di un dodecaedro regolare, poichè è composta di dodici pentagoni regolari eguali, e tutti i suoi angoli solidi sono eguali fra loro. Dunque *dato un pentagono regolare si è costruito il dodecaedro*. C.B.F.

QUINTO.

Costruzione dell' icosaedro.

Sia dato il triangolo ABC (*fig. 247*); fa d'uopo costruire l' icosaedro. Fig. 247.

Bisogna prima formare un angolo solido con cinque piani eguali al piano ABC ed egualmente inclinati ciascuno sul suo adiacente. Perciò sul lato B'C' eguale a BC; fatto il pentagono regolare B'C'H'I'D', dal centro di questo pentagono alzisi sul suo piano una perpendicolare che terminerà in A' di modo che B'A'=B'C'; tirinsi A'C', A'H', A'I', A'D'; e l' angolo solido A' formato dai cinque piani B'A'C', C'A'H', etc. sarà l'angolo solido domandato. Poichè le obblique A'B', A'C' etc. sono eguali; una di esse A'B' è eguale al lato B'C'; dunque tutti i triangoli B'A'C', C'A'H', etc. sono eguali fra loro ed al triangolo dato ABC.

È d' altronde evidente che i piani B'A'C', C'A'H', etc. sono egualmente inclinati ciascuno sul suo adiacente; poichè gli angoli solidi B', C', etc. sono eguali fra loro, a motivo che i medesimi son formati con due angoli di triangolo equilatero ed uno di pentagono regolare. Chiamisi K l' inclinazione dei due piani ove sono gli angoli eguali; inclinazione che si può determinare mediante la proposizione XXIV del lib. V, l' angolo K sarà nel tempo stesso l' inclinazione di ciascuno dei piani che compongono l' angolo solido A' sul suo adiacente.

Posto ciò, se si fanno ai punti A, B, C, angoli solidi eguali ognuno all'angolo A', si avrà una superficie convessa DEFG etc. composta di dieci triangoli equilateri,

cui ciascuno sarà inclinato sul suo adiacente della quantità K, e gli angoli D, E, F, etc. del suo contorno riuniranno alternativamente tre e due angoli di triangoli equilateri. Immaginisi una seconda superficie eguale alla superficie DEFG etc.; queste due superficie potranno adattarsi scambievolmente, unendo ciascuno angolo triplo dell'una con un angolo duplo dell'altra; e, siccome i piani di questi angoli ànno già fra loro l'inclinazione K necessaria per formare un angolo solido quintuplo eguale all'angolo A, non si cambierà nulla in questa riunione allo stato di ciascuna superficie in particolare, e le due insieme formeranno una sola superficie continua composta di venti triangoli equilateri. Questa superficie sarà quella dell'icosaedro regolare, poichè d'altronde tutti gli angoli solidi sono eguali fra loro. Dunque *dato un triangolo ABC si è costruito l'icosaedro*. C. B. F.

PROPOSIZIONE III.

PROBLEMA.

Trovare la inclinazione di due facce adiacenti di un poliedro regolare.

Questa inclinazione deducesi immediatamente dalla costruzione già data dei cinque poliedri regolari; al che bisogna aggiungere la proposizione XXIV del lib. V, in virtù della quale essendo dati i tre angoli piani che formano un angolo solido, si determina l'angolo che due di questi piani fanno fra loro.

Fig. 243. *Nel tetraedro* (*fig. 243*). Ciascun angolo solido è formato da tre angoli di triangoli equilateri; bisogna dunque cercare mediante il problema citato l'angolo che due di questi piani fanno tra loro; quest'angolo sarà l'inclinazione di due facce adiacenti del tetraedro.

Fig. 244. *Nell'esaedro* (*fig. 244*). L'angolo di due facce adiacenti è un angolo retto.

Fig. 245. *Nell'ottaedro* (*fig. 245*). Formasi un angolo solido con due angoli di triangoli equilateri ed un angolo retto; l'inclinazione dei due piani, ove sono gli angoli dei triangoli, sarà quella di due facce adiacenti dell'ottaedro.

Fig. 246. *Nel dodecaedro* (*fig. 246*). Ogni angolo solido è formato con tre angoli di pentagoni regolari; quindi l'incli-

nazione dei piani di due di tali angoli sarà quella di due facce adiacenti del dodecaedro.

Nell' icosaedro (*fig. 247*). Formasi un angolo solido con due angoli di triangoli equilateri ed un angolo di pentagono regolare; l' inclinazione dei due piani, ove sono gli angoli dei triangoli, sarà quella di due facce adiacenti dell' icosaedro. Fig. 247.

Quindi *si è trovata l'inclinazione di due facce adiacenti di un poliedro regolare*. C. B. F.

PROPOSIZIONE IV.

PROBLEMA.

Essendo dato il lato di un poliedro regolare, trovare il raggio della sfera iscritta e quello della sfera circoscritta ad un tal poliedro.

Bisogna prima dimostrare, che ogni poliedro regolare può essere iscritto e circoscritto ad una sfera.

Sia AB (*fig. 248*) il lato comune a due facce adiacenti; siano G ed E i centri di queste due facce, e CD, ED le perpendicolari abbassate da questi centri sul lato comune AB, le quali cadranno nel punto D, medio di questo lato. Le due perpendicolari CD, DE fanno tra loro un angolo cognito che è eguale alla inclinazione di due facce adiacenti, determinata dal precedente problema. Ora, se nel piano CDE, perpendicolare ad AB, si conducano sopra CD e ED le perpendicolari indefinite CO ed EO che s' incontrino in O, dico che il punto O sarà il centro della sfera iscritta e quello altresì della sfera circoscritta, essendo OC il raggio della prima, ed OA quello della seconda. Fig. 248.

Infatti, poichè le apoteme CD, DE sono eguali, e l'ipotenusa DO comune, il triangolo rettangolo CDO è eguale al triangolo rettangolo ODE (*Prop. 18, lib. I*), e la perpendicolare OC è eguale alla perpendicolare OE. Ma essendo AB perpendicolare al piano CDE, il piano ABC è perpendicolare a CDE (*Prop. 17, lib. V*), o CDE ad ABC; d'altronde CO nel piano CDE è perpendicolare a CD, intersezione comune dei piani CDE, ABC; dunque CO (*Prop. 18, lib. V*) è perpendicolare al piano ABC. Per la medesima ragione EO è perpendicolare al piano ABE; dunque le due perpendicolari CO, EO, condotte ai piani delle due facce adiacenti da' centri di queste facce, s' incontrano in

un medesimo punto O e sono eguali. Supponga si adesso che ABC ed ABE rappresentino due altre facce adiacenti qualunque; l'apotema CD resterà sempre della medesima grandezza, come pure l'angolo CDO metà di CDE; dunque il triangolo rettangolo CDO ed il suo lato CO saranno eguali per rapporto a tutte le facce del poliedro; dunque se dal punto O come centro, e col raggio OC si descriva una sfera, questa toccherà tutte le facce del poliedro nei loro centri (poichè i piani ABC, ABE saranno perpendicolari all'estremità di un raggio), e la sfera sarà iscritta nel poliedro, od il poliedro circoscritto alla sfera.

Congiungansi OA, OB; a cagione di CA = CB le due obblique OA, OB, allontanandosi egualmente dalla perpendicolare, saranno eguali; sarà lo stesso di due altre linee rette qualunque condotte dal centro O alle estremità di un medesimo lato; dunque tutte queste linee sono eguali fra loro; dunque, se dal punto O, come centro, e col raggio OA si descriva una superficie sferica, essa passerà per i vertici degli angoli solidi del poliedro, e la sfera sarà circoscritta al poliedro od il poliedro iscritto nella sfera.

Posto ciò, la soluzione del problema proposto non à più difficoltà veruna, e può eseguirsi così:

Essendo dato il lato di una faccia del poliedro, descrivasi questa faccia, e sia CD (*fig.* 249) la sua apotema. Cerchisi pel problema precedente la inclinazione di due facce adiacenti del poliedro, e facciasi l'angolo CDE eguale a questa inclinazione: prendasi DE eguale a CD; conducasi CO ed EO perpendicolari a CD ed ED; queste due perpendicolari s' incontreranno in un punto O; e CO sarà il raggio della sfera iscritta nel poliedro.

Fig. 249.

Sul prolungamento di DC prendasi CA eguale al raggio del cerchio circoscritto ad una faccia del poliedro; ed OA sarà il raggio della sfera circoscritta a questo poliedro medesimo.

Poichè i triangoli rettangoli CDO, CAO, della figura 249 sono eguali ai triangoli dello stesso nome nella figura 248, quindi è che mentre CD e CA sono i raggi dei circoli iscritto e circoscritto ad una faccia del poliedro, OC ed OA sono i raggi delle sfere iscritta e circoscritta al medesimo poliedro. Quindi *essendo dato il lato di un poliedro regolare si è trovato il raggio della sfera iscritta e quello della sfera circoscritta ad un tale poliedro.* C. B. F.

Scolio. Si possono dedurre dalle precedenti proposizioni molte conseguenze.

1.° Ogni poliedro regolare può essere diviso in tante piramidi regolari quante facce à il poliedro; il vertice comune di queste piramidi sarà il centro del poliedro che è nel tempo stesso quello della sfera iscritta e circoscritta.

2.° La solidità di un poliedro regolare è eguale alla sua superficie moltiplicata pel terzo del raggio della sfera iscritta.

3.° Due poliedri regolari del medesimo nome sono due solidi simili, e le loro dimensioni omologhe sono proporzionali; dunque i raggi delle sfere iscritte o circoscritte sono fra loro come i lati di questi poliedri.

4.° Se s' iscriva un poliedro regolare in una sfera, i piani condotti dal centro per i differenti lati divideranno la superficie della sfera in tanti poligoni sferici eguali e simili quante sono le facce del poliedro.

LIBRO OTTAVO

I TRE CORPI ROTONDI

DEFINIZIONI.

Fig. 250. I. Si chiama *cilindro* (a) (*fig. 250*) il solido generato dalla rivoluzione di un rettangolo ABCD, che s'immagina rivolgersi intorno al lato immobile AB.

In questo movimento i lati AD, BC restando sempre perpendicolari al lato AB descrivono piani circolari eguali DHP, CGQ che si chiamano le basi *del cilindro*, ed il lato CD ne descrive la *superficie convessa*.

La linea immobile AB si chiama l'*asse del cilindro*.

Ogni sezione KLM, fatta in un cilindro perpendicolarmente all'asse è un circolo eguale a ciascuna delle basi; poichè mentre il rettangolo ABCD gira intorno ad AB, la linea IK perpendicolare ad AB descrive un piano circolare eguale alla base, e questo piano non è altra cosa che la sezione fatta perpendicolarmente all'asse al punto I.

Ogni sezione PQGH fatta per l'asse è un rettangolo doppio del rettangolo generatore ABCD.

Fig. 251. II. Si chiama *cono* (b) (*fig. 251*) il solido generato dalla rivoluzione del triangolo rettangolo SAB che s'immagina girare intorno al lato immobile SA. In questo movimento il lato AB descrive un piano circolare BDCE che si chiama la *base del cono*, e la ipotenusa SB ne descrive la *superficie convessa*.

Il punto S si chiama il *vertice del cono*, SA l' *asse* o l' *altezza*, ed SB il *lato* o l' *apotema*.

Ogni sezione HKFI fatta perpendicolarmente all' asse è

(a) Cilindro da κυλίω (*cylio*) volgere, rotolare.

(b) Cono da κῶνος (*cônos*) cono. (Il Trad.)

un circolo ; ogni sezione SDE fatta secondo l'asse è un triangolo isoscele doppio del triangolo generatore SAB.

III. Se dal cono SCDB si tolga, per una sezione parallela alla base, il cono SFKH, il solido restante CBHF si chiama *cono troncato* o *tronco di cono*.

Si può supporre che desso sia descritto dalla rivoluzione del trapezio ABHG, i cui angoli A e G siano retti, intorno al lato AG. La linea immobile AG si chiama l'*asse* o l'*altezza del tronco*, i circoli BDC, HKF ne sono le *basi*, e BH n'è il *lato*.

IV. Due cilindri o due coni sono *simili* allorchè i loro assi stanno fra loro come i diametri delle loro basi.

V. Se nel circolo ACD (*fig.* 252) che serve di base ad un cilindro s'iscriva un poligono ABCDE, e che sopra la base ABCDE si elevi un prisma retto eguale in altezza al cilindro, il prisma dicesi *iscritto nel cilindro* od il *cilindro circoscritto al prisma*.

Fig. 252.

È chiaro che le costole AF, BG, CH, etc. del prisma essendo perpendicolari al piano della base, sono comprese nella superficie convessa del cilindro ; dunque il prisma ed il cilindro si toccano secondo queste costole.

VI. Similmente se ABCD (*fig.* 253) è un poligono circoscritto alla base di un cilindro, e che sulla base ABCD si costruisca un prisma retto eguale in altezza allo stesso cilindro, il prisma si chiama *circoscritto al cilindro* od il cilindro *iscritto al prisma*.

Fig. 253.

Siano M, N, etc. i punti di contatto dei lati AB, BC etc. e siano elevate dai punti M, N, etc. le perpendicolari MX, NY, etc. al piano della base, egli è chiaro che queste perpendicolari saranno nel medesimo tempo nella superficie del cilindro ed in quella del prisma circoscritto ; dunque esse saranno le loro linee di contatto.

N. B. Il cilindro, il cono e la sfera sono i *tre corpi rotondi* dei quali trattasi negli elementi.

LEMMI PRELIMINARI

SOPRA

LE SUPERFICIE

I.

Fig. 254 *Una superficie piana OABCD* (fig. 254) *è minore di qualunque altra superficie PABCD terminata dal medesimo contorno ABCD.*

Questa proposizione è assai evidente per essere posta nel numero degli assiomi, poichè si potrebbe supporre che il piano è tra le superficie ciò che la linea retta è fra le altre linee; la linea retta è la più corta fra due punti dati; similmente il piano è la superficie più piccola fra tutte quelle che ànno il medesimo contorno. Intanto come conviene ridurre gli assiomi al più piccolo numero possibile, ecco un ragionamento che non lascerà alcun dubbio sopra questa proposizione.

Una superficie essendo una estensione in lunghezza ed in larghezza non si può concepire che una superficie sia maggiore di un'altra, a meno che le dimensioni della prima non eccedano in alcuni sensi quelle della seconda; e se accade che le dimensioni di una superficie siano in tutti i sensi minori delle dimensioni di un'altra superficie, è evidente che la prima superficie sarà la minore delle due. Ora in qualunque senso si faccia passare il piano BPD che taglierà la superficie piana secondo BD, e l'altra superficie secondo BPD, la linea retta BD sarà sempre minore di BPD; dunque la superficie piana OABCD è minore della superficie circondante PABCD.

II.

Ogni superficie convessa OABCD (fig. 255) *è minore di un' altra superficie qualunque che circondasse la prima appoggiandosi sul medesimo contorno* ABCD.

Fig. 255.

Qui si ripeterà, che intendesi per *superficie convessa* una superficie che una linea retta non può incontrarla in più di due punti; intanto è possibile che una linea retta si applichi esattamente in un certo senso sopra una superficie convessa; le superficie del cono e del cilindro ne danno esempî. Si osserverà ancora che la denominazione di superficie convessa non è limitata alla sole superficie curve; dessa comprende altresì le superficie *poliedre* o composte di più piani, ed anche le superficie in parte curve ed in parte poliedre.

Ciò posto, se la superficie AOBCD non è minore di tutte quelle che la circondano, sia tra queste ultime PABCD la superficie minore che sarà al più eguale ad OABCD. Per un punto qualunque O facciasi passare un piano che tocca la superficie OABCD senza tagliarla; questo piano incontrerà la superficie PABCD, e la parte che ne taglierà sarà maggiore del piano terminato alla medesima superficie (*Lemma primo*); dunque conservando il resto della superficie PABCD si potrebbe sostituire il piano alla parte tagliata, e si avrebbe una nuova superficie che circonderebbe sempre la superficie OABCD, e che sarebbe minore di PABCD.

Ma questa è la minore di tutte per ipotesi; dunque questa ipotesi non può sussistere; dunque *la superficie convessa OABCD è minore di qualunque altra superficie che circondasse OABCD, e che fosse terminata dal medesimo contorno ABCD.*

Scolio. Con un ragionamento interamente simile si dimostrerà, che

1.° Se una superficie convessa terminata da due contorni (*fig.* 256) ABC, DEF è circondata da un' altra superficie qualunque terminata dai medesimi contorni, la superficie circondata sarà la minore delle due.

Fig. 256.

2.° Se una superficie convessa AB (*fig.* 257) è circondata da tutte le parti da un' altra superficie MN, sia che desse avessero punti, linee o piani comuni, sia che desse non avessero alcun punto comune, la superficie circondata sarà sempre minore della superficie circondante.

Fig. 257.

Infatti fra queste non può esservene alcuna che sia la minore di tutte, poichè in qualunque caso si potrebbe sempre condurre il piano CD tangente alla superficie convessa, il quale piano sarebbe minore della superficie CMD (*Lemma primo*); e però la superficie CND sarebbe minore di MN, ciò che è contrario all' ipotesi che MN è la minore di tutte. Dunque la superficie convessa AB è minore di tutte quelle che la circondano.

PROPOSIZIONE PRIMA.

TEOREMA.

La solidità di un cilindro è eguale al prodotto della sua base per la sua altezza.

Fig. 258. Sia CA (*fig.* 258) il raggio della base del cilindro dato, H la sua altezza; rappresentisi con *superf.* CA la superficie del circolo che à per raggio CA; dico che la solidità del cilindro sarà

$$superf.\ CA \times H.$$

Infatti se *superf.* CA × H non è la misura del cilindro dato, questo prodotto sarà la misura di un cilindro maggiore o minore. E prima suppongasi che sia la misura di un cilindro minore, per esempio, del cilindro del quale CD è il raggio della base ed H l' altezza.

Circoscrivasi al cerchio che à per raggio CD un poligono regolare GHIP, i cui lati non incontrino la circonferenza che à per raggio CA (*Prop.* 10, *lib. IV*); immaginisi in seguito un prisma retto che abbia per base il poligono GHIP, e per altezza H, il quale prisma sarà circoscritto al cilindro che à per raggio della base CD. Ciò posto la solidità del prisma (*Prop.* 15, *lib. VI*) è eguale alla base GHIP moltiplicata per l'altezza H; la base GHIP è minore del circolo che à per raggio CA; dunque la solidità del prisma è minore di *superf.* CA × H. Ma *superf.* CA × H è, per ipotesi, la solidità del cilindro iscritto nel prisma; dunque il prisma sarebbe minore del cilindro: or, al contrario, il cilindro è minore del prisma, poichè vi è contenuto; dunque è impossibile che *super.* CA × H sia la misura del cilindro che à per raggio della base CD ed H

per altezza; ovvero, in termini più generali, *il prodotto della base di un cilindro per la sua altezza non può misurare un cilindro minore.*

Dico in secondo luogo che questo medesimo prodotto non può misurare un cilindro maggiore; infatti per non moltiplicare figure, sia CD il raggio della base del cilindro dato, e sia, se è possibile, *superf.* CD $\times$ H la misura di un cilindro maggiore, per esempio, del cilindro che à per raggio della base CA ed H per altezza.

Se si fa la stessa costruzione che nel primo caso, il prisma circoscritto al cilindro dato avrà per misura GHIP $\times$ H; l'area GHIP è maggiore di *superf.* CD; dunque la solidità del prisma della quale trattasi è maggiore di *superf.* CD $\times$ H; il prisma sarebbe dunque maggiore del cilindro della stessa altezza che à per base *superf.* CA. Ora, al contrario, il prisma è minore del cilindro, poichè vi è contenuto; dunque *è impossibile che la base di un cilindro moltiplicata per la sua altezza sia la misura di un cilindro maggiore.*

Dunque finalmente *la solidità di un cilindro è eguale al prodotto della sua base per la sua altezza.* C. B. D.

Corollario I. I cilindri della medesima altezza stanno fra loro come le loro basi, ed i cilindri della medesima base stanno fra loro come le altezze.

Corollario II. I cilindri simili stanno come i cubi delle altezze, o come i cubi dei diametri delle basi. Poichè le basi stanno come i quadrati dei loro diametri, e siccome i cilindri sono simili, i diametri delle basi stanno come le altezze (*Def. 4*); dunque le basi stanno come i quadrati delle altezze; dunque le basi moltiplicate per le altezze od i cilindri stessi stanno come i cubi delle altezze.

Scolio. Sia R il raggio della base di un cilindro, H la sua altezza, la superficie della base sarà πR^2 (*Prop. 12, lib. IV*), e la solidità del cilindro sarà

$$\pi R^2 \times H \text{ o } \pi R^2 H.$$

PROPOSIZIONE II.

LEMMA.

La superficie convessa di un prisma retto è eguale al perimetro della sua base moltiplicato per la sua altezza.

Infatti questa superficie è eguale alla somma dei rettangoli AFGB (*fig.* 252), BGHC, CHID etc. dai quali è composta; ora le altezze AF, BG, CH etc. di questi rettangoli sono eguali all'altezza del prisma; le loro basi AB, BC, CD, etc. prese insieme compongono il perimetro della base del prisma. Dunque la somma di questi rettangoli o la superficie convessa del prisma è eguale al perimetro della sua base moltiplicato per la sua altezza.

Corollario. Se due prismi retti ànno la medesima altezza, le superficie convesse di questi prismi staranno fra loro come i perimetri delle loro basi.

Fig. 252.

PROPOSIZIONE III.

LEMMA.

La superficie convessa del cilindro è maggiore della superficie convessa di ogni prisma iscritto e minore della superficie convessa di ogni prisma circoscritto.

Infatti la superficie convessa del cilindro e quella del prisma iscritto ABCDEF (*fig.* 252) possono essere considerate come aventi la medesima lunghezza, poichè qualunque sezione fatta nell'uno e nell' altro parallelamente ad AF è eguale ad AF; e se per avere le larghezze di queste superficie si taglino con piani paralleli alla base o perpendicolari alla costola AF, le sezioni saranno eguali una alla circonferenza della base, l'altra al contorno del poligono ABCDE minore di questa circonferenza; dunque poichè a lunghezza eguale la larghezza della superficie cilindrica è maggiore di quella della superficie prismatica, ne segue che la prima superficie è maggiore della seconda.

Fig. 252.

Si dimostrerà con un ragionamento interamente simile che la superficie convessa del cilindro è minore di quella di qualunque prisma circoscritto BCDKLH (*fig.* 253).

Fig. 253.

PROPOSIZIONE IV.

TEOREMA.

La superficie convessa di un cilindro è eguale alla circonferenza della sua base moltiplicata per la sua altezza.

Sia CA (*fig. 258*) il raggio della base del cilindro dato, H la sua altezza; se si rappresenti con *circ.* CA la circonferenza che à per raggio CA; dico che *circ.* CA×H sarà la superficie convessa di questo cilindro.

Fig. 258.

Infatti, se si neghi questa proposizione, bisognerà che *circ.* CA × H sia la superficie di un cilindro maggiore o minore; e primieramente suppongasi che essa sia la superficie di un cilindro minore, per esempio, del cilindro, cui CD è il raggio della base, ed H l'altezza.

Circoscrivasi al cerchio, il cui raggio è CD un poligono regolare GHIP, i cui lati non incontrino la circonferenza che à CA per raggio; immaginisi di poi un prisma retto che abbia per altezza H, e per base il poligono GHIP. La superficie convessa di questo prisma sarà eguale al contorno del poligono GHIP moltiplicato per l' altezza H (*Prop. 2*); questo contorno è minore della circonferenza, il cui raggio è CA; dunque la superficie convessa del prisma è minore di *circ.* CA × H. Ma *circ.* CA × H è, per ipotesi, la superficie convessa del cilindro che à CD per raggio della base, il quale cilindro è iscritto nel prisma; dunque la superficie convessa del prisma sarebbe minore di quella del cilindro iscritto. Ora, al contrario deve essere maggiore (*Prop. 3*); dunque la ipotesi è assurda; dunque,

1.° *La circonferenza della base di un cilindro moltiplicata per la sua altezza non può misurare la superficie convessa di un cilindro minore.*

Dico secondariamente che questo medesimo prodotto non può misurare la superficie di un cilindro maggiore.

Infatti, per non cangiar figura, sia CD il raggio della base del cilindro dato, e sia, se è possibile, *circ.* CD×H la superficie convessa di un cilindro che colla medesima altezza avesse per base un circolo maggiore, per esempio, il circolo il cui raggio è CA.

Si farà la medesima costruzione come nella prima supposizione, e la superficie convessa del prisma sarà sempre

eguale al contorno del poligono GHIP moltiplicato per l'altezza H. Ma questo contorno è maggiore di *circ.* CD; dunque la superficie del prisma sarebbe maggiore di *circ.* CD $\times$ H, che per ipotesi è la superficie del cilindro della medesima altezza, il cui raggio della base è CA. Dunque la superficie del prisma sarebbe maggiore di quella di questo cilindro. Ma quando anche il prisma fosse iscritto nel cilindro, la sua superficie sarebbe minore di quella del cilindro (*Prop. 3*); con più ragione essa è minore quando il prisma non si estende fino al cilindro. Dunque la seconda ipotesi non potrebbe aver luogo ; dunque

2.° *La circonferenza della base di un cilindro moltiplicata per la sua altezza non può misurare la superficie di un cilindro maggiore.*

Dunque finalmente

La superficie convessa di un cilindro è eguale alla circonferenza della sua base moltiplicata per la sua altezza. C. B. D.

PROPOSIZIONE V.

TEOREMA.

La solidità di un cono è eguale al prodotto della sua base per il terzo della sua altezza.

Fig. 259. Sia SO (*fig.* 259) l'altezza del cono dato, AO il raggio della base, se si rappresenti con *superf.* AO la superficie della base ; dico che la solidità di questo cono sarà

eguale a *superf.* AO $\times \frac{1}{3}$ SO.

Infatti suppongasi 1.° che *superf.* AO $\times \frac{1}{3}$ SO sia la solidità di un cono maggiore ; per esempio , del cono che à per altezza SO ; ma che OB maggiore di AO è il raggio della base.

Al circolo, il cui raggio è AO, circoscrivasi un poligono regolare MNPT che non incontri la circonferenza, il cui raggio è BO (*Prop. 10, lib. IV*) ; immaginisi indi una piramide che abbia per base il poligono e per vertice il punto S. La solidità di questa piramide (*Prop. 19 , lib. VI*) è eguale all'area del poligono MNPT moltiplicata pel

terzo dell' altezza SO; ma il poligono è maggiore del circolo iscritto rappresentato da *superf.* AO; dunque la piramide è maggiore di *superf.* AO $\times \frac{1}{3}$ SO che, per ipotesi, è la misura del cono che à per vertice S, ed OB per raggio della base. Ora, al contrario, la piramide è minore del cono, poichè vi è contenuta; dunque,

1.° *È impossibile che la base di un cono moltiplicata pel terzo della sua altezza sia la misura di un cono maggiore.*

Dico secondariamente che questo medesimo prodotto non può essere la misura di un cono minore.

Infatti, per non cangiar figura, sia OB il raggio della base del cono dato, e sia, se è possibile, *superf.* OB $\times \frac{1}{3}$ SO la solidità del cono che à per altezza SO e per base il circolo, il cui raggio è AO. Si farà la medesima costruzione che qui sopra, e la piramide SMNPT avrà per misura l'area MNPT moltiplicata per $\frac{1}{3}$ SO. Ma l' area MNPT è minore di *superf.* OB; dunque la piramide avrebbe una misura minore di *superf.* OB $\times \frac{1}{3}$ SO, e per conseguenza sarebbe minore del cono, il cui raggio della base è AO ed SO l' altezza. Ora, al contrario, la piramide è maggiore del cono, poichè il cono vi è contenuto; dunque,

2.° *È impossibile che la base di un cono moltiplicata pel terzo della sua altezza sia la misura di un cono minore.*

Dunque finalmente *la solidità di un cono è eguale al prodotto della sua base pel terzo della sua altezza.* C.B.D.

Corollario. Un cono è il terzo di un cilindro della medesima base e della medesima altezza, donde segue, che

1.° I coni di eguali altezze stanno fra loro come le basi.

2.° I coni di basi eguali stanno fra loro come le altezze.

3.° I coni simili sono come i cubi dei diametri delle loro basi o come i cubi delle loro altezze.

Scolio. Sia R il raggio della base di un cono, H la

sua altezza ; la solidità del cono sarà

$$\pi R^2 \times \frac{1}{3} H \text{ o } \frac{1}{3} \pi R^2 H.$$

PROPOSIZIONE VI.

TEOREMA.

Ogni cono troncato à per misura la somma dei quadrati dei raggi delle due basi più il prodotto di questi stessi raggi tutto moltiplicato pel prodotto dell'altezza di esso cono troncato per $\frac{1}{3}\pi$.

Fig. 260. Sia ADEB (*fig. 260*) il cono troncato, AO, DP siano i raggi delle basi, ed OP sia l' altezza ; dico che la misura di esso cono troncato sarà

$$\frac{1}{3}\pi . OP. [\overline{AO}^2 + \overline{DP}^2 + AO \times DP].$$

Sia TFGH una piramide triangolare che abbia la medesima altezza del cono SAB, e la cui base FGH sia equivalente alla base del cono. Si può supporre che queste due basi siano situate sopra un medesimo piano ; allora i vertici S e T saranno ad eguali distanze dal piano delle basi , ed il piano EPD prolungato farà nella piramide la sezione IKL. Ora dico che questa sezione IKL è equivalente alla base DE ; infatti le basi AB , DE stanno fra loro come i quadrati dei raggi AO, DP (*Prop. 11, lib. IV*) o come i quadrati delle altezze SO, SP ; i triangoli FGH, IKL stanno fra loro come i quadrati di queste medesime altezze (*Prop. 16, lib. VI*) ; dunque i circoli AB , DE stanno fra loro come i triangoli FGH , IKL. Ma per ipotesi il triangolo FGH è equivalente al circolo AB; dunque il triangolo IKL è equivalente al circolo DE.

Ora la base AB moltiplicata per $\frac{1}{3}$ SO è la solidità del

cono SAB, e la base FGH moltiplicata per $\frac{1}{3}$ SO è la solidità della piramide TFGH; dunque, per essere le basi equivalenti, la solidità della piramide è eguale a quella del cono. Per una simile ragione la piramide TIKL è equivalente al cono SDE; dunque il tronco di cono ADEB è equivalente al tronco di piramide FGHIKL. Ma la base FGH, equivalente al circolo il cui raggio è AO, à per misura $\pi \times \overline{AO}^2$; similmente la base IKL $= \pi \times \overline{DP}^2$; e la media proporzionale fra $\pi \times \overline{AO}^2$ e $\pi \times \overline{DP}^2$ è $\pi \times AO \times DP$; dunque la solidità del tronco di piramide o quella del tronco di cono à per misura

$$\frac{1}{3}OP \times [\pi \times \overline{AO}^2 + \pi \times \overline{DP}^2 + \pi \times AO \times DP];$$

(*Prop. 24, lib. VI*), che è lo stesso che

$$\frac{1}{3}\pi \times OP \times [\overline{AO}^2 + \overline{DP}^2 + AO \times DP].$$

Dunque *ogni cono troncato* etc. C. B. D.

PROPOSIZIONE VII.

TEOREMA.

La superficie convessa di un cono è eguale alla circonferenza della sua base moltiplicata per la metà del suo lato.

Sia AO (*fig. 259*) il raggio della base del cono dato, S il suo vertice, ed SA il suo lato; dico che la sua superficie sarà

Fig. 259.

$$circ.\ AO \times \frac{1}{2} SA.$$

Infatti sia, se è possibile, *circ.* $AO \times \frac{1}{2}$ SA la superficie di un cono che avesse per vertice il punto S e per base il cerchio descritto col raggio OB, maggiore di AO.

Circoscrivasi al cerchio minore un poligono regolare MNPT, i cui lati non incontrino la circonferenza che à per raggio OB; e sia SMNPT la piramide regolare che avrebbe per base il poligono e per vertice il punto S. Il triangolo SMN, uno di quelli che compongono la superficie convessa della piramide, à per misura la sua base MN moltiplicata per la metà dell' altezza SA che è nel tempo stesso il lato del cono dato; quest' altezza essendo eguale in tutti gli altri triangoli SNP, SPQ, etc., ne segue che la superficie convessa della piramide è eguale al contorno MNPTM moltiplicato per $\frac{1}{2}$ SA. Ma il contorno MNPTM è maggiore di *circ.* AO; dunque la superficie convessa della piramide è maggiore di *circ.* AO $\times \frac{1}{2}$ SA, e per conseguenza maggiore della superficie convessa del cono che col medesimo vertice S avesse per base il cerchio descritto col raggio OB. Ora al contrario, la superficie convessa del cono è maggiore di quella della piramide; infatti se si addossi base a base, cioè, la piramide ad una piramide eguale, il cono ad un cono eguale; la superficie dei due coni circonderà da tutte le parti la superficie delle due piramidi; dunque la prima superficie sarà maggiore della seconda (*Lemma secondo*); dunque la superficie del cono è maggiore di quella della piramide che vi è contenuta. Il contrario sarebbe una conseguenza delle ipotesi; dunque questa ipotesi non può aver luogo; dunque 1.° la circonferenza della base di un cono dato moltiplicata per la metà del suo lato non può misurare la superficie di un cono maggiore.

Dico 2.° che lo stesso prodotto non può misurare la superficie di un cono minore. Infatti sia BO il raggio della base del cono dato, e sia, se è possibile, *circ.* BO $\times \frac{1}{2}$ SB la superficie del cono, il cui vertice è S, ed AO, minore di OB, il raggio della base.

Avendo fatta la medesima costruzione di sopra, la superficie della piramide SMNPT sarà sempre eguale al contorno MNPT moltiplicato per $\frac{1}{2}$ SA. Ora il contorno MNPT

è minore di *circ.* BO; SA è minore di SB; dunque, per questa duplice ragione, la superficie convessa della piramide è minore di *circ.* BO $\times \frac{1}{2}$ SB, che, per supposizione, è la superficie del cono, cui AO è il raggio della base; dunque la superficie della piramide sarebbe minore di quella del cono iscritto. Ora, al contrario, è maggiore; poichè addossando base con base, la piramide ad una piramide eguale, il cono ad un cono eguale, la superficie delle due piramidi circonderà quelle dei due coni e per conseguenza sarà la maggiore. Dunque 2.° è impossibile che la circonferenza della base di un cono dato moltiplicata per la metà del suo lato misuri la superficie di un cono minore.

Dunque *finalmente la superficie convessa di un cono è eguale alla circonferenza della sua base moltiplicata per la metà del suo lato.* C. B. D.

Scolio. Sia L il lato di un cono, R il raggio della sua base; la circonferenza di questa base sarà $2\pi R$ e la superficie del cono avrà per misura $2\pi R \times \frac{1}{2}$ L ovvero πRL.

PROPOSIZIONE VIII.

TEOREMA.

La superficie convessa di un tronco di cono è eguale al suo lato moltiplicato per la semisomma delle circonferenze delle sue due basi.

Sia il tronco di cono ADEB (*fig. 261*); dico che la sua superficie convessa è eguale al suo lato AD moltiplicato per la semisomma delle circonferenze delle sue due basi AB, DE.

Fig. 261.

Nel piano SAB che passa per l' asse SO conducasi perpendicolarmente ad SA la linea AF eguale alla circonferenza che à per raggio AO; tirisi SF e conducasi DH parallela ad AF. Per i triangoli simili SAO, SDC si avrà

$$AO : DC :: SA : SD;$$

e per i triangoli simili SAF, SDH si avrà

$$AF : DH :: SA : SD;$$

dunque

AF : DH :: AO : DC ossia :: *circ.* AO : *circ.* DC (*Prop. 11, lib. IV*).

Ma, per costruzione, AF = *circ.* AO; dunque DH = *circ.* DC. Ciò posto, il triangolo SAF che à per misura $AF \times \frac{1}{2} SA$ è eguale alla superficie del cono SAB che à per misura *circ.* $AO \times \frac{1}{2} SA$. Per una simile ragione il triangolo SDH è eguale alla superficie del cono SDE. Dunque la superficie del tronco ADEB è eguale a quella del trapezio ADHF. Quest'ultimo à per misura (*Prop. 7, lib. III*) $AD \times \left[\frac{AF + DH}{2}\right]$; dunque *la superficie del tronco di cono ADEB è eguale al suo lato AD moltiplicato per la semisomma delle circonferenze delle sue due basi*. C. B. D.

Corollario. Pel punto I, medio di AD, conducasi IKL parallela ad AB ed IM parallela ad AF; si dimostrerà, come qui sopra, che IM = *circ.* IK. Ma il trapezio ADHF = AD × IM = AD × *circ.* IK. Dunque si può ancora dire che *la superficie di un tronco di cono è eguale al suo lato moltiplicato per la circonferenza di una sezione fatta ad egual distanza dalle due basi*.

Scolio. Se una linea AD situata tutta intera da una medesima parte della linea OC e nello stesso piano fa una rivoluzione intorno ad OC, la superficie descritta da AD avrà per misura $AD \times \left[\frac{circ.\, AO + circ.\, DC}{2}\right]$ ovvero AD × *circ.* IK, essendo le linee AO, DC, IK, perpendicolari abbassate dalle estremità e dal mezzo della linea AD sopra l'asse OC.

Infatti, se si prolunghino AD ed OC fino al loro incontro scambievole in S, è chiaro che la superficie descritta da AD è quella di un cono troncato, cui AO e DC sono i raggi delle basi, avendo il cono intero per vertice il punto S. Dunque questa superficie avrà la misura menzionata.

Questa misura avrebbe sempre luogo quando anche il punto D cadesse in S, il che darebbe un cono intero; ed anche quando la linea AD fosse parallela all'asse, lo che darebbe un cilindro. Nel primo caso DC sarebbe nullo; nel secondo DC sarebbe eguale ad AO e ad IK.

PROPOSIZIONE IX.

LEMMA.

Siano AB, BC, CD (fig. 262) *più lati successivi di un* Fig. 262. *poligono regolare, O il suo centro ed OI il raggio del cerchio iscritto; se si suppone che la porzione del poligono ABCD situata tutta intera da una medesima parte del diametro FG, faccia una rivoluzione intorno a questo diametro, la superficie descritta da ABCD avrà per misura MQ* × circ. *OI, essendo MQ l'altezza di questa superficie o la parte dell'asse compresa fra le perpendicolari AM, DQ.*

Essendo I il punto medio di AB, ed essendo IK una perpendicolare all'asse abbassata dal punto I, la superficie descritta da AB avrà per misura AB × *circ.* IK (*Prop. 8*). Conducasi AX parallela all'asse; i triangoli ABX, OIK avranno i lati perpendicolari respettivamente, cioè OI ad AB, IK ad AX, OK a BX; dunque questi triangoli sono simili e danno la proporzione

BB : AX o MN :: OI : IK ossia :: *circ.* OI : *circ.* IK;

dunque

$$AB \times circ.\ IK = MN \times circ.\ OI.$$

Donde vedesi che la superficie descritta da AB è eguale alla sua altezza MN moltiplicata per la circonferenza del cerchio iscritto. Similmente la superficie descritta da BC, = NP × *circ.* OI, la superficie descritta da CD, = PQ × *circ.* OI. Dunque la superficie descritta dalla porzione di poligono ABCD à per misura

$$(MN + NP + PQ) \times circ.\ OI,$$

ovvero

$$MQ \times circ.\ OI;$$

essa dunque è eguale alla sua altezza moltiplicata per la circonferenza del cerchio iscritto.

Corollario. Se il poligono intero è di un numero pari di lati, e se l' asse FG passa per due vertici opposti F e G, la superficie intera descritta dalla rivoluzione del mezzo poligono FACG sarà eguale al suo asse FG moltiplicato per la circonferenza del cerchio iscritto. Questo asse FG sarà nel tempo stesso il diametro del cerchio circoscritto.

PROPOSIZIONE X.

TEOREMA.

La superficie della sfera è eguale al suo diametro moltiplicato per la circonferenza di un cerchio massimo.

Fig. 263. Sia la sfera, il cui diametro è AB (*fig.* 263); dico che la sua superficie è eguale al diametro AB moltiplicato per la circonferenza di un cerchio massimo, cioè che sarà

$$AB \times circ.\ AC.$$

Infatti, se ciò non è, AB $\times$ *circ.* AC sarà la superficie di una sfera maggiore o minore. Primieramente dico che il diametro di una sfera moltiplicato per la circonferenza del suo cerchio massimo non può misurare la superficie di una sfera maggiore. Poichè sia, s' è possibile, AB $\times$ *circ.* AC la superficie della sfera che à per raggio CD.

Al circolo che à per raggio CA circoscrivasi un poligono regolare di un numero pari di lati che non incontrino la circonferenza, il cui raggio è CD; siano M ed S due vertici opposti di questo poligono; ed intorno al diametro MS facciasi girare il semi-poligono MPS. La superficie descritta da questo poligono avrà per misura MS $\times$ *circ.* AC (*Prop.* 9); ma MS è maggiore di AB; dunque la superficie descritta dal poligono è maggiore di AB $\times$ *circ.* AC, e per conseguenza maggiore della superficie della sfera, il cui raggio è CD. Ora, per lo contrario, la superficie della sfera è maggiore della superficie descritta dal poligono, poichè la prima circonda la seconda da tutte le parti. Dunque 1.° il diametro di una sfera moltiplicato per la circonferenza del suo cerchio massimo non può misurare la superficie di una sfera maggiore.

Dico 2.° che questo stesso prodotto non può misurare

la superficie di una sfera minore. Poichè sia, se è possibile, DE $\times$ *circ.* CD la superficie della sfera che à per raggio CA. Si farà la medesima costruzione come nel primo caso, e la superficie del solido generato dal poligono sarà sempre eguale ad MS $\times$ *circ.* AC. Ma MS è minore di DE, e *circ.* AC minore di *circ.* CD; dunque per queste due ragioni la superficie del solido descritto dal poligono sarebbe minore di DE $\times$ *circ.* CD, e per conseguenza minore della superficie della sfera, il cui raggio è AC. Ora, al contrario, la superficie descritta dal poligono è maggiore della superficie della sfera, il cui raggio è AC, poichè la prima superficie circonda la seconda; dunque 2.° il diametro di una sfera moltiplicato per la circonferenza del suo cerchio massimo non può misurare la superficie di una sfera minore.

Dunque *la superficie della sfera è eguale al suo diametro moltiplicato per la circonferenza del suo cerchio massimo.* C. B. D.

Corollario. La superficie del cerchio massimo si misura moltiplicando la sua circonferenza per la metà del raggio o pel quarto del diametro; dunque *la superficie della sfera è quadrupla di quel'a di un cerchio massimo.*

Scolio. Essendo così misurata la superficie della sfera e paragonata con superficie piane, sarà facile di avere il valore assoluto dei fusi e triangoli sferici, cui si è determinato di sopra il rapporto coll'intera superficie della sfera.

Primieramente il fuso, il cui angolo è A, sta alla superficie della sfera come l'angolo A sta a quattro angoli retti (*Prop. 20, lib. VII*) o come l'arco di cerchio massimo che misura l'angolo A sta alla circonferenza di questo medesimo cerchio massimo. Ma la superficie della sfera è eguale a questa circonferenza moltiplicata pel diametro; dunque la superficie del fuso è eguale all'arco che misura l'angolo di questo fuso moltiplicato pel diametro.

In secondo luogo ogni triangolo sferico è equivalente ad un fuso, il cui angolo è eguale alla metà dell'eccesso della somma dei suoi tre angoli sopra due angoli retti (*Prop. 23, lib. VII*). Siano dunque P, Q, R, gli archi di cerchio massimo che misurano i tre angoli del triangolo; sia C la circonferenza di un cerchio massimo, e D il suo diametro; il triangolo sferico sarà equivalente al fuso, il cui

angolo à per misura $\dfrac{P + Q + R - \frac{1}{2}C}{2}$, e per conseguenza la sua superficie sarà $D \times \left\{\dfrac{P + Q + R - \frac{1}{2}C}{2}\right\}$.

Così, nel caso del triangolo tri-rettangolo, ciascuno degli archi P, Q, R è eguale ad $\frac{1}{4}$ C, la loro somma è $\frac{3}{4}$C, l'eccesso di questa somma sopra $\frac{1}{2}$C è $\frac{1}{4}$C, e la metà di questo eccesso $= \frac{1}{8}$C; dunque la superficie del triangolo tri-rettangolo $= \frac{1}{8}C \times D$, che è l'ottava parte della superficie totale della sfera.

La misura dei poligoni sferici segue immediatamente da quella dei triangoli; d'altronde essa è interamente determinata dalla proposizione XXIV del lib. VII, giacchè si è ora l'unità di misura ch'è il triangolo tri-rettangolo valutata in superficie piana.

PROPOSIZIONE XI.

TEOREMA.

La superficie di una zona sferica qualunque è eguale all'altezza di questa zona moltiplicata per la circonferenza di un cerchio massimo.

Fig. 169. Sia EF (*fig.* 269) un arco qualunque minore o maggiore del quarto di circonferenza, e sia abbassata FG perpendicolare sul raggio EC; dico che la zona ad una base descritta dalla rivoluzione dell' arco EF intorno ad EC avrà per misura EG $\times$ *circ*. EC.

Infatti suppongasi primieramente che questa zona abbia una misura minore; e sia, s' è possibile, questa misura $= EG \times circ. CA$. Iscrivasi nell' arco EF una porzione di poligono regolare EMNOPF, i cui lati non tocchino la circonferenza descritta col raggio CA, ed abbassisi CI perpendicolare sopra EM; la superficie descritta dal poligono EMF, girando intorno ad EC, avrà per misura $EG \times circ. CI$ (*Prop. 9*). Questa quantità è maggiore di $EG \times circ. AC$ che, per ipotesi, è la misura della zona descritta dall' arco EF. Dunque la superficie descritta dal poligono EMNOPF sarebbe maggiore della superficie descritta dall' arco circoscritto EF; ora al contrario quest' ultima superficie è maggiore della prima; poichè essa la inviluppa da tutte le parti; dunque 1.° la misura di qualunque zona sferica ad una sola base non può esser minore dell' altezza di questa zona moltiplicata per la circonferenza di un cerchio massimo.

Dico in secondo luogo, che la misura della medesima zona non può essere maggiore dell'altezza di questa zona moltiplicata per la circonferenza di un cerchio massimo. Poichè suppongasi che si tratti di una zona descritta dall' arco AB intorno ad AC, e sia, s' è possibile, $zona\ AB > AD \times circ. AC$. La superficie intera della sfera, composta delle due zone AB, BH, à per misura $AH \times circ. AC$ (*Prop. 10*) ovvero $AD \times circ. AC + DH \times circ. AC$; se dunque si à $zona\ AB > AD \times circ. AC$, è d'uopo che si abbia $zona\ BH < DH \times circ. AC$; ciò ch' è contrario alla prima parte di già dimostrata. Dunque 2.° la misura di una zona sferica ad una sola base non può esser maggiore dell' altezza di questa zona moltiplicata per la circonferenza di un cerchio massimo.

Dunque finalmente *qualunque zona sferica ad una sola base à per misura l' altezza di questa zona moltiplicata per la circonferenza di un cerchio massimo.*

Consideriamo adesso una zona qualunque a due basi descritta dalla rivoluzione dell' arco FH (*fig. 220*) intorno al diametro DE; e sieno abbassate le perpendicolari FO, HQ su questo diametro. La zona descritta dall' arco FH è la differenza delle due zone descritte dagli archi DH e DF; queste àuno per misura $DQ \times circ. CD$, e $DO \times circ. CD$; dunque la zona descritta da FH à per misura Fig. 220.

$$[DQ - DO] \times circ. CD, \text{ ossia } OQ \times circ. CD.$$

Dunque *ogni zona sferica ad una od a due basi è per misura l' altezza di questa zona moltiplicata per la circonferenza di un circolo massimo*. C. B. D.

Corollario. Due zone prese in una medesima sfera od in isfere eguali sono tra loro come le respettive altezze; ed una zona qualunque sta alla superficie della sfera come l' altezza di questa zona sta al diametro.

PROPOSIZIONE XII.

TEOREMA.

Se un triangolo ed un rettangolo aventi la medesima base e la stessa altezza girino simultaneamente intorno alla base comune, il solido descritto dalla rivoluzione del triangolo sarà il terzo del cilindro descritto dalla rivoluzione del rettangolo.

Fig. 264 e 265. Siano il triangolo ABC ed il rettangolo BCEF (*fig. 264 e 265*) della medesima base e della stessa altezza, e che girino simultaneamente intorno alla base comune BC; dico che il solido descritto dalla rivoluzione del triangolo ABC sarà il terzo del cilindro descritto dalla rivoluzione del rettangolo BCEF.

Fig. 264. Abbassisi sull' asse la perpendicolare AD (*fig. 264*); il cono descritto dal triangolo ABD è il terzo del cilindro descritto dal rettangolo AFBD (*Coroll. Prop. 5*); parimente il cono descritto dal triangolo ADC è il terzo del cilindro descritto dal rettangolo ADCE; dunque la somma dei due coni od il solido descritto da ABC è il terzo della somma dei due cilindri o del cilindro descritto dal rettangolo BCEF.

Fig. 265. Se la perpendicolare AD (*fig. 265*) cada al di fuori del triangolo, allora il solido descritto da ABC sarà la differenza dei coni descritti da ABD ed ACD; ma nel tempo stesso il cilindro descritto da BCEF sarà la differenza dei cilindri descritti da AFBD ed AECD; dunque il solido descritto dalla rivoluzione del triangolo sarà sempre il terzo del cilindro descritto dalla rivoluzione del rettangolo della medesima base e della medesima altezza.

Dunque *se un triangolo ed un rettangolo* etc. C. B. D.

Scolio. Il cerchio, cui AD è il raggio, à per superficie

$\pi \times \overline{AD}^2$; dunque $\pi \times \overline{AD}^2 \times BC$ è la misura del cilindro descritto da BCEF, ed $\frac{1}{3}\pi \times \overline{AD}^2 \times BC$ è quella del solido descritto dal triangolo ABC.

PROPOSIZIONE XIII.

PROBLEMA.

Se un triangolo faccia una rivoluzione intorno ad una linea condotta a piacimento fuori del triangolo da un suo vertice, fa d' uopo trovare la misura del solido così generato.

Supposto che il triangolo ABC (*fig. 266*) faccia una rivoluzione intorno alla linea CD tirata a piacimento fuori del triangolo dal suo vertice C; fa d' uopo trovare la misura del solido così generato.

Fig. 266.

Prolunghisi il lato AB finchè incontri l' asse CD in D; dai punti A e B abbassinsi sull' asse le perpendicolari AM, BN.

Il solido descritto dal triangolo CAD à per misura (*Prop. 12*) $\frac{1}{3}\pi \times \overline{AM}^2 \times CD$; il solido descritto dal triangolo CBD à per misura $\frac{1}{3}\pi \times \overline{BN}^2 \times CD$; dunque la differenza di questi solidi od il solido descritto da ABC avrà per misura

$$\frac{1}{3}\pi(\overline{AM}^2 - \overline{BN}^2) \times CD.$$

Si può dare un' altra forma a questa espressione.

Dal punto I medio di AB conducasi IK perpendicolare a CD, e pel punto B conducasi BO parallela a CD; si avrà $AM + BN = 2IK$ (*Scolio*, *Prop. 7*, *lib. III*), ed $AM - BN = AO$; dunque $(AM + BN) \times (AM - BN)$ o $\overline{AM}^2 - \overline{BN}^2 = 2IK \times AO$ (*Prop. 10*, *lib. III*).

La misura del solido del quale trattasi è dunque espressa ancora da $\frac{2}{3}\pi \times IK \times AO \times CD$. Ma se si abbassi CP perpendicolare ad AB, i triangoli ABO, DCP saranno simili e daranno la proporzione

$$AO : CP :: AB : CD ;$$

donde resulta

$$AO \times CD = CP \times AB ;$$

d'altronde $CP \times AB$ è il doppio dell'area del triangolo ABC; quindi si à

$$AO \times CD = 2ABC ;$$

dunque il solido descritto dal triangolo ABC ancora à per misura $\frac{4}{3}\pi \times ABC \times IK$, ovvero, ciò che è la stessa cosa,

$$ABC \times \frac{2}{3} circ. IK \text{ (poichè } circ. IK = 2\pi . IK \text{).}$$

Dunque *il solido descritto dalla rivoluzione del triangolo ABC à per misura l'area di questo triangolo moltiplicata per i due terzi della circonferenza che descrive il punto I medio della sua base.*

Dunque *se un triangolo* etc. C. B. F.

Fig. 267. *Corollario.* Se il lato AC=CB (*fig.* 267), la linea CI sarà perpendicolare ad AB, l'area ABC sarà eguale ad $AB \times \frac{1}{2} CI$, e la solidità $\frac{4}{3}\pi \times ABC \times IK$ diventerà $\frac{2}{3}\pi \times AB \times IK \times CI$. Ma i triangoli ABO, CIK sono simili, e danno la proporzione

$$AB : BO \text{ o } MN :: CI : IK ;$$

dunque $AB \times IK = MN \times CI$; dunque il solido descritto dal triangolo isoscele ABC avrà per misura

$$\frac{2}{3}\pi \times MN \times \overline{CI}^2.$$

Scolio. La soluzione generale sembra supporre che la linea AB prolungata incontri l'asse; ma i resultamenti non sarebbero meno veri quando la linea AB fosse parallela all' asse.

Infatti il cilindro descritto da AMNB (*fig. 268*) à per misura $\pi.\overline{AM}^2.MN$, il cono descritto da ACM $= \frac{1}{3}\pi.\overline{AM}^2.CM$; ed il cono descritto da BCN $= \frac{1}{3}\pi.\overline{AM}^2.CN$.

Fig. 268.

Addizionando i due primi solidi, e togliendone il terzo, si avrà pel solido descritto da ABC,

$$\pi\,\overline{AM}^2.\left[MN + \frac{1}{3}CM\ \frac{1}{3}CN\right];$$

e poichè CN — CM = MN, questa espressione si riduce a

$$\pi\,\overline{AM}^2.\frac{2}{3}MN,$$

ovvero

$$\frac{2}{3}\pi\,\overline{CP}^2.MN,$$

ciò che si accorda coi resultamenti già ritrovati.

PROPOSIZIONE XIV.

TEOREMA.

Sieno dati più lati successivi di un poligono regolare, il suo centro ed il raggio del circolo iscritto, se s' immagini che un settore poligonale situato da una stessa parte del diametro faccia una rivoluzione intorno a questo diametro, il solido descritto avrà per misura $\frac{2}{3}$ moltiplicato pel prodotto del quadrato del raggio del circolo iscritto e per la porzione dell' asse terminata dalle perpendicolari a quest' asse abbassate dai punti estremi del settore poligonale.

Fig.262. Siano AB, BC, CD (*fig. 262*), più lati successivi di un poligono regolare O il suo centro ed OI il raggio del cerchio iscritto, se s'immagini che il settore poligonale AOD situato da una stessa parte del diametro FG faccia una rivoluzione intorno a questo diametro; dico che il solido descritto avrà per misura $\frac{2}{3} \cdot \overline{OI}^2 \cdot MQ$, essendo MQ la porzione dell' asse terminata dalle perpendicolari estreme AM, DQ.

Infatti, poichè il poligono è regolare, tutti i triangoli AOB, BOC, COD sono eguali ed isosceli. Ora secondo il corollario della proposizione precedente il solido generato dal triangolo isoscele AOB à per misura $\frac{2}{3} \cdot \overline{OI}^2 \cdot MN$; il solido descritto dal triangolo BOC à per misura $\frac{2}{3} \cdot \overline{OI}^2$, NP; ed il solido descritto dal triangolo COD à per misura $\frac{2}{3} \cdot \overline{OI}^2$, PQ. Dunque la somma di questi solidi od il solido intero descritto dal settore poligonale AOD avrà per misura

$\frac{2}{3}\pi.\overline{OI}^2.$ [MN + NP + PQ] o $\frac{2}{3}\pi.\overline{OI}^2.MQ.$

Dunque *se siano dati più lati* etc. C. B. D.

PROPOSIZIONE XV.

TEOREMA.

Ogni settore sferico à per misura la zona che gli serve di base moltiplicata pel terzo del raggio; e la sfera intera à per misura la sua superficie moltiplicata pel terzo del raggio.

Sia ABC (*fig. 269*) il settore circolare che colla sua rivoluzione intorno ad AC descrive il settore sferico; la zona descritta da AB essendo AD $\times$ *circ.* AC o 2π. AC $\times$ AD (*Prop. 11*); dico che il settore sferico avrà per misura questa zona moltiplicata per $\frac{1}{3}$ AC o sia $\frac{2}{3}\pi.\overline{AC}^2$ $\times$ AD.

Fig. 269.

Infatti 1.° suppongasi, se è possibile, che questa quantità $\frac{2}{3}\pi.\overline{AC}^2 \times AD$ sia la misura di un settore sferico maggiore, per esempio, del settore sferico descritto dal settore circolare ECF simile ad ACB.

Iscrivasi nell'arco EF la porzione di poligono regolare EMNF, i cui lati non incontrino l'arco AB; immaginisi quindi che il settore poligonale ENFG giri intorno ad EC nel medesimo tempo che il settore circolare ECF. Sia CI il raggio del cerchio iscritto nel poligono, e sia abbassata FG perpendicolare sopra EC. Il solido descritto dal settore poligonale avrà per misura $\frac{2}{3}\pi. \times \overline{CI}^2 \times$ EG (*Prop. 14*); ora CI è maggiore di AC, per costruzione, ed EG è maggiore di AD; poichè, tirando AB, EF, i triangoli EFG, ABD, che sono simili, danno la proporzione

EG : AD :: FG : BD :: CF : CB;

dunque

$$EG > AD.$$

Per questa duplice ragione $\frac{2}{3}\pi.\overline{CI}^2$. EG è maggiore di $\frac{2}{3}\pi.\overline{CA}^2$. AD; la prima espressione è la misura del solido descritto dal settore poligonale, la seconda è, per supposizione, quella del settore sferico descritto dal settore circolare ECF; dunque il solido descritto dal settore poligonale sarebbe maggiore del settore sferico descritto dal settore circolare. Ora, al contrario, è evidente che il solido cui si tratta è minore del settore sferico, giacchè vi è contenuto; dunque la supposizione dalla quale si è partito non può sussistere; dunque 1.° la zona o la base di un settore sferico moltiplicata pel terzo del raggio non può misurare un settore sferico maggiore.

Dico 2.° che il medesimo prodotto non può misurare un settore sferico minore. Poichè sia CEF il settore circolare che colla sua rivoluzione genera il settore sferico dato, e suppongasi, se è possibile, che $\frac{2}{3}\pi.\overline{CE}^2$. EG sia la misura di un settore sferico minore, per esempio di quello che proviene dal settore circolare ACB.

Restando la stessa la costruzione precedente, il solido descritto dal settore poligonale avrà sempre per misura $\frac{2}{3}\pi.\overline{CI}^2$. EG; ma CI è minore di CE; dunque il solido è minore di $\frac{2}{3}\pi.\overline{CE}^2$. EG che, per supposizione, è la misura del settore sferico descritto dal settore circolare ACB. Dunque il solido descritto dal settore poligonale sarebbe minore del settore sferico descritto da ACB. Ora, al contrario, il solido cui si tratta è maggiore del settore sferico, poichè questo è contenuto nell'altro. Dunque 2.° è impossibile che la zona di un settore sferico moltiplicata pel terzo del raggio sia la misura di un settore sferico minore.

Dunque *ogni settore sferico à per misura la zona che gli serve di base moltiplicata pel terzo del raggio.*

Un settore circolare ACB può aumentare fino a divenire eguale al semicerchio; allora il settore sferico descritto dalla sua rivoluzione è la sfera intera. Dunque *la solidità della sfera è eguale alla sua superficie moltiplicata pel terzo del suo raggio.* C. B. D.

Corollario. Essendo le superficie delle sfere come i quadrati dei loro raggi, queste superficie moltiplicate pei raggi stanno come i cubi dei raggi medesimi. Dunque *le solidità di due sfere stanno come i cubi dei loro raggi o come i cubi dei loro diametri.*

Scolio. Sia R il raggio di una sfera; la sua superficie sarà $4\pi R^2$, e la sua solidità $4\pi R^2 \times \frac{1}{3} R$, o $\frac{4}{3} \pi R^3$.

Se si chiama D il diametro, avremo $R = \frac{1}{2} D$, ed $R^3 = \frac{1}{8} D^3$; dunque la solidità esprimesi ancora con $\frac{4}{3} \pi \times \frac{1}{8} D^3$, o $\frac{1}{6} \pi D^3$.

PROPOSIZIONE XVI.

TEOREMA.

La superficie della sfera sta alla superficie totale del cilindro circoscritto (comprendendovi le sue basi) come 2 sta a 3. Le solidità di questi due corpi stanno fra loro nel medesimo rapporto.

Sia MPNQ (*fig. 270*) il cerchio massimo della sfera, ABCD il quadrato circoscritto: se si fa girare insieme il semicerchio PMQ ed il semiquadrato PADQ intorno al diametro PQ, il semicerchio descriverà la sfera, ed il semiquadrato descriverà il cilindro circoscritto alla stessa sfera; dico che la superficie della sfera sta alla superficie totale del cilindro circoscritto come 2 sta a 3; e le solidità di questi due corpi stanno fra loro nel medesimo rapporto. Fig. 270.

L'altezza AD di questo cilindro è eguale al diametro

PQ, la base del cilindro è eguale al cerchio massimo, giacchè à per diametro AB eguale ad MN; dunque la superficie convessa del cilindro (*Prop. 4*) è eguale alla circonferenza del cerchio massimo moltiplicata pel suo diametro. Questa misura è la medesima di quella della superficie della sfera (*Prop. 10*); d' onde segue che *la superficie della sfera è eguale alla superficie convessa del cilindro circoscritto.*

Ma la superficie della sfera è eguale a quattro cerchi massimi; dunque la superficie convessa del cilindro circoscritto è anch' essa eguale a quattro cerchi massimi: se vi si aggiungano le due basi che equivalgono a due cerchi massimi, la superficie totale del cilindro circoscritto sarà eguale a sei cerchi massimi; dunque la superficie della sfera sta alla superficie totale del cilindro circoscritto come 4 sta a 6, o come 2 sta a 3. Questo è il primo punto che si trattava di dimostrare.

In secondo luogo, poichè la base del cilindro circoscritto è eguale ad un cerchio massimo, e la sua altezza al diametro, la solidità del cilindro sarà eguale al cerchio massimo moltiplicato pel diametro (*Prop. 1*). Ma la solidità della sfera è eguale a quattro cerchi massimi moltiplicati pel terzo del raggio (*Prop. 15*), lo che riducesi ad un cerchio massimo moltiplicato per $\frac{4}{3}$ del raggio o per $\frac{2}{3}$ del diametro; dunque la sfera stà al cilindro circoscritto come 2 sta a 3, e per conseguenza le solidità di questi due corpi stanno fra loro come le loro superficie.

Dunque *la superficie della sfera sta alla superficie totale del cilindro circoscritto [comprendendovi le sue basi] come 2 sta a 3; le solidità di questi due corpi sono fra loro nello stesso rapporto.* C. B. D.

Scolio. Se s' immagini un poliedro, cui tutte le facce tocchino la sfera, questo poliedro potrà esser considerato come composto di piramidi che ànno tutte per vertice il centro della sfera, e le cui basi sono le differenti facce del poliedro. Ora è chiaro che tutte queste piramidi avranno per altezza comune il raggio della sfera; talmentecchè ogni piramide sarà eguale alla faccia del poliedro che le serve

di base, moltiplicata pel terzo del raggio; dunque il poliedro intero sarà eguale alla sua superficie moltiplicata pel terzo del raggio della sfera iscritta.

Si vede da ciò che le solidità dei poliedri circoscritti ad una sfera stanno fra loro come le superficie di questi medesimi poliedri. Così la proprietà che abbiamo dimostrata pel cilindro circoscritto è comune ad una infinità di corpi.

Si poteva osservare egualmente che le superficie dei poligoni circoscritti al cerchio stanno fra loro come i respettivi loro contorni.

PROPOSIZIONE XVII.

PROBLEMA.

Se un segmento circolare faccia una rivoluzione intorno ad un diametro esterno a questo segmento, trovare il valore del solido generato.

Se si supponga che il segmento circolare BMD (*fig. 271*) Fig. 271. faccia una rivoluzione intorno ad un diametro AC esterno a questo segmento; fa d' uopo trovare il valore del solido generato. Abbassinsi sull' asse le perpendicolari BE, DF; dal centro C conducasi CI perpendicolari alla corda BD; e tirinsi i raggi CB, CD.

Il solido descritto dal settore BCA $= \frac{2}{3}\pi . \overline{CB}^2 . AE$ (*Prop. 15*); il solido descritto dal settore DCA $= \frac{2}{3}\pi . \overline{CB}^2 . AF$; dunque la differenza di questi due solidi od il solido descritto dal settore DCB $= \frac{2}{3}\pi . CB^2 . (AF - AE) = \frac{2}{3}\pi . \overline{CB}^2 EF$. Ma il solido descritto dal triangolo isoscele DCB à per misura $\frac{2}{3}\pi . \overline{CI}^2 EF$ (*Prop. 14*); dun-

que il solido descritto dal segmento $\text{BMD} = \frac{2}{3}\pi.\ \text{EF}.$ $(\overline{\text{CB}}^2 - \overline{\text{CI}}^2)$. Ora nel triangolo rettangolo CBI si à $\overline{\text{CB}}^2 - \overline{\text{CI}}^2 = \overline{\text{BI}}^2 = \frac{1}{4}\overline{\text{BD}}^2$; dunque il solido descritto dal segmento BMD avrà per misura $\frac{2}{3}\pi.\ \text{EF}.\ \frac{1}{4}\overline{\text{BD}}^2$, ossia $\frac{1}{6}\ \pi\ \overline{\text{BD}}^2.\text{EF}.$

Quindi *se un segmento circolare faccia una rivoluzione intorno ad un diametro esterno a questo segmento si è trovato il valore del solido generato.* C. B. F.

Scolio. Il solido descritto dal segmento BMD sta alla sfera che à per diametro BD, come $\frac{1}{6}\pi.\ \overline{\text{BD}}^2.\text{EF}$ sta a $\frac{1}{6}\ \pi.\ \overline{\text{BD}}^3$, ovvero :: EF : BD.

PROPOSIZIONE XVIII.

TEOREMA.

Ogni segmento di sfera compreso fra due piani paralleli à per misura la semisomma delle sue basi moltiplicata per la sua altezza, più la solidità della sfera, cui questa medesima altezza è il diametro.

Fig. 271. Siano BE, DF (*fig. 271*) i raggi delle basi del segmento, EF la sua altezza, talmente che il segmento sia generato dalla rivoluzione dello spazio circolare BMDFE intorno all'asse FE; dico che il segmento di sfera à per misura la semisomma delle sue basi moltiplicata per la sua altezza, più la solidità della sfera, cui questa medesima altezza è il diametro.

Il solido descritto dal segmento BMD (*Prop. 17*) è eguale ad

$$\frac{1}{6}\pi.\ \overline{\text{BD}}^2.\ \text{EF}\ ;$$

il tronco di cono descritto dal trapezio BDFE (*Prop. 6*) è eguale

$$\frac{1}{3}\pi . EF . (\overline{BE}^2 + \overline{DF}^2 + BE . DF);$$

dunque il segmento della sfera che è la somma di questi due solidi è eguale ad

$$\frac{1}{6}\pi . EF [2\,\overline{BE}^2 + 2\,\overline{DF}^2 + 2\,BE . DF + \overline{BD}^2].$$

Ma congiungendo BO parallela ad EF, si avrà

$DO = DF - BE, \overline{DO}^2 = \overline{DF}^2 - 2DF . BE + \overline{BE}^2$ (*Prop. 9, lib. III*), e per conseguenza

$$\overline{BD}^2 = \overline{BO}^2 + \overline{DO}^2 = \overline{EF}^2 + \overline{DF}^2 - 2DF \times BE + \overline{BE}^2 .$$

Mettendo questo valore in vece di $\overline{BD}^2$ nell'espressione del segmento, e cancellando ciò che distruggesi, si avrà per la solidità del segmento

$$\frac{1}{6}\pi . EF . [3\,\overline{BE}^2 + 3\,\overline{DF}^2 + \overline{EF}^2];$$

espressione che si decompone in due parti; una cioè

$$\frac{1}{6}\pi . EF . \left\{ 3\overline{BE}^2 + 3\overline{DF}^2 \right\},$$

ossia

$$EF . \left\{ \frac{\pi . \overline{BE}^2 + \pi . \overline{DF}^2}{2} \right\}$$

è la semisomma delle basi moltiplicata per l'altezza; l'altra

$$\frac{1}{6}\pi \times \overline{EF}^3$$

rappresenta la sfera, il cui diametro è EF (*Scolio, Prop. 15*). Dunque *ogni segmento di sfera* etc. C. B. D.

Corollario. Se una delle basi è nulla, il segmento de quale trattasi diventa un segmento sferico ad una sola base; dunque, *ogni segmento sferico ad una sola base equivale alla metà del cilindro della medesima base e della medesima altezza, più la sfera che à questo diametro per altezza.*

SCOLIO GENERALE.

Sia A il raggio della base di un cilindro, A la sua altezza; la solidità del cilindro sarà

$$\pi R^2 \times H \text{ o } \pi R^2 H.$$

Sia R il raggio della base di un cono, H la sua altezza; la solidità del cono sarà

$$\pi \overline{R}^2 \times \frac{1}{3} H \text{ o } \frac{1}{3} \pi R^2 H.$$

Siano A e B i raggi delle basi di un cono troncato, H la sua altezza; la solidità del tronco di cono sarà

$$\frac{1}{3} \pi H \left\{ A^2 + B^2 + AB \right\}.$$

Siá R il raggio di una sfera; la sua solidità sarà

$$\frac{4}{3} \pi R^3.$$

Sia R il raggio di un settore sferico, H l'altezza della zona che gli serve di base; la solidità del settore sarà

$$\frac{2}{3} \pi R^2 H.$$

Siano P e Q le due basi di un segmento sferico, H la sua altezza; la solidità di questo segmento sarà

$$\left\{ \frac{P + Q}{2} \right\} . H + \frac{1}{6} \pi H^3$$

Se il segmento sferico non à che una base P, l'altra essendo nulla; la sua solidità sarà

$$\frac{1}{2} P H + \frac{1}{6} \pi H^3.$$

FINE DELLA GEOMETRIA SOLIDA.

NOTE

AGLI ELEMENTI DI GEOMETRIA

NOTA PRIMA

SOPRA ALCUNI NOMI E DEFINIZIONI.

Alcune nuove espressioni e definizioni sono state introdotte in questi elementi che il linguaggio geometrico più esatto e preciso rendono. Parleremo ora questi cangiamenti ed altri ne verranno proposti che più completamente alle stesse osservazioni soddisfare potrebbero.

Nella definizione ordinaria del *parallelogrammo rettangolo* e del *quadrato* si dice che gli angoli di queste figure sono retti; sarebbe più esatto il dire che i loro angoli sono eguali. Infatti supporre che i quattro angoli di un quadrilatero possono esser retti, come pure che gli angoli retti sono eguali tra loro, è un supporre proposizioni che ànno bisogno di essere dimostrate. Si eviterebbe questo inconveniente e molti altri del medesimo genere, se, in vece di porre le definizioni secondo l'uso al principio di un libro, si distribuissero nel corso del libro medesimo, ciascuna nel luogo dove ciò che la definizione suppone sia stato digià dimostrato.

La parola *parallelogrammo*, secondo la sua etimologia, significa *linee parallele;* questa parola non conviene più alla figura di quattro lati, che a quella di sei, di otto etc., i cui lati opposti fossero paralleli. La parola *parallelepipedo* significa parimente *piani paralleli;* e perciò non indica più il solido a sei facce, che quelli i quali ne avessero otto, dieci, etc. cui gli opposti fossero paralleli. Sembrerebbe dunque che le denominazioni di *parallelogrammo* e *parallelepipedo* che d'altronde ànno l'inconveniente di esser lunghissime, dovessero esser tolte dalla geometria. Si potrebbero a loro sostituire quelle di *rombo*

e *romboide* che sono molto più comode, e conservare il nome di *losanga* al quadrilatero, i cui lati sono tutti eguali.

La parola *inclinazione* dev' essere considerata nel medesimo senso di quella di *angolo;* l' una e l' altro indicano la maniera di essere di due linee o di due piani che s'incontrano, ovvero che prolungati s' incontrerebbero. La inclinazione di due linee è nulla allorchè l' angolo è nullo, vale a dire allorchè le due linee son parallele o coincidenti. La inclinazione è maggiore allorchè l'angolo è maggiore od allorchè le due linee fanno tra loro un angolo molto ottuso. La qualità d' *inclinare* è presa in un senso differente; una linea *inclina* tanto più sopra un' altra, quanto essa si allontana più dalla perpendicolare a quest' ultima.

Euclide ed altri autori chiamano spesso *triangoli eguali* i triangoli che non sono eguali se non che in superficie, e *solidi eguali* i solidi che non sono eguali se non che in solidità. Ci è sembrato più convenevole chiamar questi triangoli o questi solidi, *triangoli* o *solidi equivalenti*, e di riserbare la denominazione di *triangoli eguali* e *solidi eguali* a quelli che posson coincidere per soprapposizione.

Dippiù è necessario distinguer nei solidi e superficie curve due specie di eguaglianza che sono differenti. In effetto due solidi, due angoli solidi, due triangoli o poligoni sferici posson essere eguali in tutte le loro parti costituenti, senza poter nulladimeno coincider per soprapposizione. Non sembra che questa osservazione sia stata fatta nei libri elementari, e frattanto bisogna aver riguardo a certe dimostrazioni fondate sopra la coincidenza delle figure che non riescono esatte. Tali sono quelle dimostrazioni, in virtù delle quali molti autori pretendono di provare l'eguaglianza dei triangoli sferici nei medesimi casi e nella stessa maniera che quella dei triangoli rettilinei; soprattutto se ne vede un esempio allorchè *Roberto Simson* (1) attaccando la dimostrazione della prop. XXVIII del libro XI di *Euclide* cade egli stesso nell' inconveniente di fondar la sua dimostrazione sopra una coincidenza che non esiste. Si è dunque creduto di dover dare un nome particolare a questa eguaglianza che non porta alla coincidenza; noi l'abbiamo chiamata *eguaglianza per simmetria;*

(1) *Vedasi l' opera di questo autore intitolata*: Euclidis elementorum libri sex, etc. Glasguae, 1756.

e le figure che sono in questo caso le chiamiamo figure *simmetriche*.

Quindi le denominazioni di figure eguali, figure simmetriche, figure equivalenti si rapportano a cose diverse, e non debbono esser confuse in una sola denominazione.

Nelle proposizioni che riguardano i poligoni, gli angoli solidi ed i poliedri abbiamo escluso quelli i quali avessero angoli rientranti. Perchè, oltre alla convenienza di limitarsi negli elementi alle figure più semplici, se questa esclusione non avesse luogo, certe proposizioni o non sarebbero vere o avrebbero bisogno di modificazione. Ci siamo dunque ristretti alla considerazione delle linee e delle superficie che chiamiamo *convesse*, e che son tali che una linea retta non può tagliarle in più di due punti.

Abbiamo impiegato molto frequentemente l' espressione *prodotto di due* o *di un maggior numero di linee*, per il quale s' intende il prodotto dei numeri che rappresentano queste linee, valutandole secondo una unità lineare presa a piacimento. Il senso di questa espressione essendo così determinato non vi è alcuna difficoltà nell'usarla. S' intenderà nella maniera medesima ciò che significa il prodotto di una superficie per una linea, di una superficie per un solido, etc.; basta avere stabilito una volta per sempre che questi prodotti sono o debbono essere considerati come prodotti di numeri, ciascuno della specie che gli conviene. Così il prodotto di una superficie per un solido non è altra cosa che il prodotto di un numero di unità superficiali per un numero di unità solide.

Spesso nel discorso ci serviamo della parola *angolo* per dinotare il punto situato al suo vertice: questa espressione è viziosa. Sarebbe più chiaro e più esatto esprimere con un nome particolare, come quello di *vertici*, i punti situati alle cime degli angoli di un poligono e di un poliedro. Ecco come si deve intendere la denominazione di *vertici di un poligono e di un poliedro*, dei quali n' è stato fatto uso.

Abbiamo seguita la definizione ordinaria di *figure rettilinee simili*; ma noi osserveremo che esse contengono tre condizioni superflue. Infatti per costruire un poligono, il cui numero di lati sia n, bisogna in primo luogo conoscere un lato, ed in seguito avere la posizione dei vertici degli angoli situati fuori di questo lato. Ora il numero di questi angoli è $n-2$, e la posizione di ciascun vertice esige due dati; dal che si vede che il numero totale dei

dati necessarî per costruire un poligono di n lati è $1 + 2n-4$, ovvero $2n-3$. Ma nel poligono simile vi è un lato a piacimento, e così il numero delle condizioni necessarie perchè un poligono sia simile ad un poligono dato è $2n-4$. Ora la definizione ordinaria esige 1.° che gli angoli sieno respettivamente eguali, e vale a dire n condizioni; 2.° che i lati omologhi sieno proporzionali, il che vuol dire $n-1$ condizioni. Vi sono dunque $2n-1$ condizioni, cioè tre di più. Per ovviare a questo inconveniente si potrebbe decomporre la definizione in due altre; cioè:

1.° *Due triangoli sono simili quando ànno due angoli respettivamente eguali.*

2.° *Due poligoni sono simili quando si possono formare nell' uno e nell' altro un medesimo numero dei triangoli respettivamente simili e similmente disposti.*

Ma affinchè quest'ultima definizione non contenga essa pure condizioni superflue, fa d' uopo che il numero dei triangoli sia eguale al numero dei lati meno due; ciò può succedere in due maniere. Si possono condurre da due angoli omologhi diagonali agli angoli opposti; allora tutti i triangoli formati in ciascun poligono avranno un vertice comune, e la loro somma sarà eguale al poligono; ovvero si può supporre che tutti i triangoli formati in un poligono abbiano per base comune un lato del poligono, e per vertici quelli de' differenti angoli opposti alla detta base. Nell' uno e l' altro caso il numero dei triangoli formati da una parte e dall'altra essendo $n-2$, le condizioni della loro similitudine saranno in numero di $2n-4$; e la definizione non conterrà nulla di superfluo. Posta questa nuova definizione l' altra diventerà un teorema che si potrà immediatamente dimostrare.

Se la definizione delle figure rettilinee simili è imperfetta nei libri di elementi, quella dei *solidi poliedri simili* lo è ancora di più. In *Euclide* questa definizione dipende da un teorema non dimostrato; negli altri autori à l' inconveniente di aver molto del superfluo. Noi abbiamo dunque rigettate siffatte definizioni dei solidi simili, e ne abbiamo sostituita un' altra fondata sopra i principî pocanzi esposti. Ma siccome vi son molte osservazioni da fare sopra questo soggetto, ritorneremo a parlarne in una particolare nota.

La definizione della *perpendicolare ad un piano* può essere riguardata come un teorema; quella poi dell'*inclina-*

zione di due piani à bisogno pure di essere giustificata mercè un ragionamento; altre son nel medesimo caso. Ecco perchè nel conservare queste definizioni secondo l'uso antico abbiam curato citar le proposizioni ov'esse son dimostrate; qualche volta ci siam contentati di aggiungere un piccolo schiarimento.

L'*angolo* formato dall'incontro *di due piani* e *l'angolo solido* formato dall'incontro di più di due piani in un medesimo punto sono grandezze, ciascuna della sua specie, alle quali forse tornerebbe in acconcio di dar nomi particolari. Senza ciò egli è difficile di evitare l'oscurità e la circonlocuzione quando si parla delle disposizioni dei piani che compongono la superficie di un poliedro. E siccome la teorica di questi solidi è stata fino al presente poco coltivata, è meno disconvenevole introdurvi nuove espressioni, se esse sono richieste dalla natura delle cose.

Io proporrei di chiamar *cuneo* l'angolo formato da due piani; la *costola* o *vertice* del cuneo sarebbe l'intersezione comune di quei due piani. Il cuneo s'indicherebbe con quattro lettere, le due medie corrisponderebbero alla costola. Allora un *cuneo retto* sarebbe l'angolo formato da due piani perpendicolari tra loro. Quattro *cunei* retti riempierebbero tutto lo spazio angolare solido intorno ad una linea retta data. Questa nuova denominazione non impedirebbe che il *cuneo* non avesse sempre per sua misura l'angolo formato dalle due perpendicolari condotte in ciascuno dei piani da un medesimo punto del vertice od intersezione comune.

NOTA SECONDA

Sopra la dimostrazione della proposizione XIX, lib. I, e di qualche altra proposizione fondamentale della geometria.

La dimostrazione data nel testo nella proposizione XIX è forse la più diretta che si possa trovare nel genere puramente elementare; speriamo ch'essa sia accolta dagli amatori della esattezza geometrica, e ch'essa faccia finalmente dissipare dagli elementi la imperfezione alla quale fin'ora è stata soggetta la teorica delle parallele.

Profitteremo di questa occasione onde fare alcune nuove osservazioni sulla dimostrazione che avevamo data della

medesima proposizione nella 3.ª edizione di questa opera, pubblicata nel 1800 e nelle seguenti edizioni fino all' 8.ª inclusivamente; è necessario perciò di richiamare succintamente il principio sul quale questa dimostrazione è stata fondata.

Abbiamo dimostrato da principio in una maniera rigorosa, che la somma degli angoli di un triangolo non può essere maggiore di due angoli retti, proposizione che separa in un colpo con una differenza essenziale i triangoli rettilinei dai triangoli sferici; stabilita questa prima parte restava a provare che la somma degli angoli non può essere minore di due angoli retti; ora come l' eccesso dei tre angoli sopra due angoli retti, quale à luogo nei triangoli sferici, è proporzionale all' area del triangolo; similmente il *deficit*, se ve ne fosse ne' triangoli rettilinei, sarebbe proporzionale all' area del triangolo. Dopo ciò è facile vedere che se si potesse costruire con un triangolo dato un altro triangolo nel quale il triangolo dato sia contenuto almeno m volte, il *deficit* di questo nuovo triangolo eguaglierà almeno m volte il *deficit* del triangolo dato; in modo che la somma degli angoli del triangolo maggiore diminuirà progressivamente a misura che m aumenta, fino a diventar nulla o negativa. Resultato assurdo e che dimostra che la somma degli angoli di un triangolo non può essere minore di due angoli retti.

Prendendo per guida questo principio di dimostrazione che è infallibile, abbiamo fatto vedere che tutta la difficoltà si riduceva a costruire un triangolo che contenesse al meno due volte il triangolo dato; ma la soluzione che abbiamo data di questo problema, in apparenza semplicissimo, suppone che per un punto dato in un angolo minore di due terzi in un angolo retto, si possa sempre far passare una linea retta che incontrasse nel tempo stesso i due lati dell' angolo dato.

Ci eravamo così avvicinati di molto al nostro fine, ma non l'avevamo intieramente seguito, poichè la nostra dimostrazione dipendeva da un *postulatum* che con ogni forza poteva essere negato (*). Questa considerazione ci à

(*) *Si vede in un articolo del* Philosophical magazine *del marzo 1822, che un dotto geometra à saggiato di perfezionare questa dimostrazione e di renderla indipendente da*

fatto rinvenire nella nona edizione al semplice andamento di *Euclide*, rinviando alle note la dimostrazione rigorosa.

Esaminando le cose con maggiore attenzione siamo rimasti convinti che per dimostrare completamente il nostro *postulatum* bisognava dedurre dalla definizione della linea retta una proprietà caratteristica di questa linea che esclude ogni simiglianza con la forma di una iperbola compresa tra i suoi due asintoti. Ecco qual è a questo riguardo il resultato delle nostre ricerche.

Sia BAC (fig. 274) *un angolo dato*, *ed* M *un punto dato dentro di esso; dividasi l'angolo* BAC *in due egualmente con la retta* AD, *e dal punto* M *tirisi* MP *perpendicolare sopra* AD ; *dico che la retta* MP *prolungata in un senso e nell' altro incontrerà necessariamente i due lati dell' angolo* BAC. Fig. 274.

Poichè se essa incontra un lato di quest' angolo, incontrerà l' altro, essendo il tutto eguale ne' due lati a partire dal punto P; se essa non incontrasse un lato, non incontrerebbe l' altro per la medesima ragione; così in quest' ultimo caso essa dovrebbe essere racchiusa tutta intera nello spazio compreso tra i lati dell' angolo BAC; ora, ripugna alla natura della linea retta che una tal linea, indefinitivamente prolungata, possa essere racchiusa in un angolo.

In fatti, ogni linea retta AB (*fig.* 275) tirata sopra un piano ed indefinitamente prolungata ne' due sensi divide questo piano in due parti che essendo soprapposte coincidono in tutta la loro estensione e sono perfettamente eguali. La parte AMB del piano totale, situata dal lato di AB, è eguale in tutto alla parte AM'B situata dall'altro lato; poichè se si prende un punto fisso C sopra la retta AB, ogni altro punto M della parte AMB sarà determinato dalla distanza CM e dall' angolo ACM; prenden- Fig. 275.

ogni postulatum; *ma la costruzione impiegata per dimostrare la seconda parte consiste a tirare da un punto dato differenti rette a tutti i vertici di una linea che si deve considerare come poligonale, per ragionare nell' ipotesi di colui che nega la proposizione: ora la convessità di questa linea, se essa avesse luogo, non permetterebbe di continuare indefinitamente la costruzione dell' autore, come bisognerebbe per l' esattezza della sua dimostrazione.*

do dunque dall'altro lato un angolo ACM' = ACM ed una distanza CM' = CM è evidente che i punti M ed M' avranno la medesima situazione nelle due parti del piano, e che queste due parti essendo soprapposte, i punti M ed M' si confonderanno in un solo.

Suppongasi ora, se è possibile, che una linea retta indefinita XY sia racchiusa tutta intiera in uno spazio angolare qualunque, per esempio, nell' angolo BCM, essa non potrà che dividere in due parti eguali od ineguali la parte del piano compresa nell' angolo BCM; questa parte à la sua corrispondente BCM' situata dall' altro lato BC; ma come oltre queste due parti eguali del piano, ve ne sono due altre racchiuse negli angoli eguali ACM, ACM', si vede che lo spazio angolare BCM non è la metà di tutto il piano; dunque la linea retta XY che si suppone dividere in due porzioni lo spazio BCM, non potrà dividere che in due parti ineguali la totalità del piano, ciò che è contrario alla natura della linea retta.

Con questo principio sempliciissimo, non solamente il *postulatum* che impediva la nostra dimostrazione essere rigorosa si trova dimostrato, ma si può ancora dimostrare immediatamente il *postulatum* di *Euclide*. Questo *postulatum* si riduce facilmente, come si sa, al caso in cui una di queste rette AC (*fig. 276*) essendo perpendicolare ad AB, l' altra retta DB fa con AB un angolo ABD minore di un retto. Si tratta dunque dimostrare che in questo caso BD prolungata deve incontrare AC.

Fig. 276

In fatti, ciò non essendo, prolungando AC verso C' e facendo l' angolo ABD' = ABD, la retta CC' sarebbe compresa tutta intera nell' angolo DBD' minore di due retti, il che è impossibile.

Lasciamo ai geometri il decidere se questa dimostrazione non meriterebbe di essere ammessa negli elementi a preferenza di qualunque altra per ristabilire l' andamento di *Euclide* divenuto intieramente rigoroso con la soppressione del suo *postulatum*.

Noi ci proponiamo intanto di far vedere che si può impiegar l'analisi con molto vantaggio per dimostrare rigorosamente la proposizione XIX e le altre proposizioni fondamentali della geometria. Questo è ciò che svilupperemo con tutto il dettaglio necessario, cominciando dal teorema sopra la somma de' tre angoli del triangolo.

Si dimostra immediatamente con la soprapposizione,

e senza alcuna proposizione preliminare che *due triangoli sono eguali quando ànno un lato eguale adiacente a due angoli respettivamente eguali.* Chiamiamo p il lato del quale si tratta, A e B i due angoli adiacenti, C il terzo angolo. Bisogna dunque che l'angolo C sia interamente determinato quando si conoscono gli angoli A e B col lato p; infatti, se diversi angoli C potessero corrispondere ai tre dati elementi A, B, p, vi sarebbero altrettanti triangoli differenti che avrebbero un lato eguale adiacente a due angoli respettivamente eguali, il che è impossibile; dunque l' angolo C dev'essere una funzione determinata delle tre quantità A, B, p; il che esprimo così, $C=\varphi : (A, B, p)$.

Sia l' angolo retto eguale all'unità, allora gli angoli A, B, C saranno numeri compresi tra o e 2; e poichè $C=\varphi : (A, B, p)$, dico che la linea p non dev' entrare nella funzione φ. Infatti si è veduto che C debb' essere interamente determinato dai soli dati A, B, p senz'altro angolo nè linea qualunque: ma la linea p è eterogenea con i numeri A, B, C; e, se si avesse una equazione tra A, B, C, p, si potrebbe ricavare il valore di p in A, B, C; e da ciò ne resulterebbe che p è eguale ad un numero, il che è assurdo; dunque p non può entrare nella funzione φ; e si à in conseguenza semplicemente $C=\varphi : (A, B)$ . . . . (1).

(1) *Si è opposto a questa dimostrazione che, se essa fosse applicata parola per parola ai triangoli sferici, ne resulterebbe che due angoli cogniti basterebbero per determinare il terzo; il che non à luogo in questa sorta di triangoli. La risposta è che nei triangoli sferici evvi un elemento di più che nei triangoli piani, e questo elemento è il raggio della sfera, dal quale non si dee fare astrazione. Sia dunque* r *questo raggio; allora, in vece di avere* $C=\varphi (A B, p)$, *si avrà* $C=\varphi (A, B, p, r)$, *o solamente*

$$C=\varphi\left(A, B, \frac{p}{r}\right),$$ *in virtù della legge degli omogenei.*

Ora, poichè il rapporto $\frac{p}{r}$ *è un numero, come pure A,*

Questa formola prova di già che se due angoli di un triangolo sono eguali a due angoli di un altro triangolo, il terzo debb'essere eguale al terzo; e, ciò posto, è facile di arrivare al teorema che noi abbiamo in considerazione.

Fig. 109. Sia primieramente ABC (*fig. 109*) un triangolo rettangolo in A ; dal punto A abbassate AD perpendicolare sopra l' ipotenusa. Gli angoli B e D del triangolo ABD sono eguali agli angoli B ed A del triangolo BAC; dunque , secondo ciò che abbiam dimostrato, il terzo BAD è eguale al terzo C. Per la medesima ragione l'angolo DAC=B; dunque BAD + DAC o BAC = B + C: ora l' angolo BAC è retto ; dunque *i due angoli acuti di un triangolo rettangolo*, *presi insieme*, *equivalgono ad un angolo retto.*

Fig. 112. Sia in seguito BAC (*fig. 112*) un triangolo qualunque, e BC un lato che non sia minore di ciascuno degli altri due: se dall'angolo opposto A si abbassi la perpendicolare AD sopra BC, questa perpendicolare cadrà dentro del triangolo ABC, e lo dividerà in due triangoli rettangoli BAD, DAC: ora nel triangolo rettangolo BAD i due angoli BAD, ACD equivalgono insieme un angolo retto: nel triangolo rettangolo DAC i due angoli DAC, ACD equivalgono pure un angolo retto ; dunque i quattro angoli riuniti o solamente i tre BAC, ABC, ACB equivalgono insieme due angoli retti ; dunque *in ogni triangolo la somma dei tre angoli è eguale a due angoli retti.*

Da ciò si vede che questo teorema , considerato *a priori* , non dipende punto da un concatenamento di proposizioni , e che anzi si deduce immediatamente dal principio dell' omogeneità ; principio che deve aver luogo in ogni relazione tra quantità qualunque esse siano. Ma proseguiamo e facciam vedere che dal medesimo possono ricavarsi altri teoremi fondamentali della geometria.

Conserviamo le medesime denominazioni come sopra, e chiamiamo di più m il lato opposto all'angolo A, ed n il lato opposto all' angolo B. La quantità m debb'essere interamente determinata dalle sole quantità A, B, p; dun-

B, C , niente impedisce che $\frac{p}{r}$ non si trovi nella funzione φ, ed in tal caso non si può più conchiudere $C=\varphi\,(A, B)$.

que m è una funzione di A, B, p, ed $\frac{m}{p}$ ne è pure una altra, di modo che si può fare $\frac{m}{p} = \downarrow : (A, B, p)$. Ma $\frac{m}{p}$ è un numero, come pure lo sono A e B; dunque la funzione $\downarrow$ non dee contenere la linea p, e si à semplicemente $\frac{m}{p} = \downarrow : (A, B)$, ovvero $m = p\downarrow : (A, B)$. Si à dunque similmente $n = p\downarrow : (B, A)$.

Sia adesso un altro triangolo formato coi medesimi angoli A, B, C, ai quali sieno respettivamente opposti i lati m', n', p'. Poichè A e B non cangiano, si avrà in questo nuovo triangolo $m' = p' \downarrow : (A, B)$, e $n' = p' \downarrow : (B, A)$. Dunque $m : m' :: n : n' :: p : p'$. Dunque *nei triangoli equiangoli i lati opposti agli angoli eguali sono proporzionali.*

Da questa proposizione generale si deduce come caso particolare quella che noi abbiamo supposta nel testo, per la dimostrazione della proposizione XX. Infatti i triangoli AFG, AML ànno due angoli eguali respettivamente, cioè l' angolo A comune ed un angolo retto. Dunque questi triangoli sono equiangoli; dunque si à la proporzione

$$AF : AL :: AG : AM,$$

e con ciò la proposizione XX è pienamente dimostrata.

La proposizione del quadrato dell'ipotenusa è, come si sa, una conseguenza di quella dei triangoli equiangoli. Ecco dunque tre proposizioni fondamentali della geometria, cioè quella dei tre angoli di un triangolo, quella dei triangoli equiangoli e quella del quadrato dell' ipotenusa, che si deducono semplicissimamente ed immediatamente dalla considerazione delle funzioni. Si possono ancora col medesimo metodo dimostrare succintamente le proposizioni concernenti le figure simili ed i solidi simili.

Sia ABCDE (*fig. 281*) un poligono qualunque; avendo scelto un lato AB, come base, fate tanti triangoli ABC, ABD, etc. sopra questa base quanti angoli C, D, E, etc. sono al di fuori. Sia la base $AB = p$; sieno A e B i due angoli del triangolo ABC adiacenti al lato AB; sieno A' Fig. 281.

e B′ i due angoli del triangolo ABD adiacenti al medesimo lato AB; e così di seguito. La figura ABCDE sarà interamente determinata se si conoscerà il lato p con gli angoli A, B, A′, B′, A″, B″, etc. ed il numero dei dati sarà in tutto $2n-3$, n essendo il numero de'lati del poligono. Ciò posto, un lato od una linea qualunque x, condotto a piacimento nel poligono, con i soli dati che costituiscono il poligono sarà una funzione di questi dati;

e siccome $\frac{x}{p}$ debb' essere un numero, si potrà supporre

$\frac{x}{p}=\downarrow:(A, B, A', B', \text{etc.})$ ovvero $x=p\downarrow:(A, B, A', B', \text{etc.})$, e la funzione $\downarrow$ non conterrà p. Se con i medesimi angoli A, B, A′, B′ etc., ed un altro lato p' si forma un secondo poligono, si avrà per la linea x', corrispondente od omologa a x, il valore $x'=p'\downarrow:(A, B, A', B', \text{etc.})$; dunque $x : x' :: p : p'$. Si possono adunque definir le figure così costrutte *figure simili;* laonde *nelle figure simili le linee omologhe sono proporzionali.* Così non solamente i lati omologhi, le diagonali omologhe, ma le linee terminate della stessa maniera nelle due figure sono tra loro come due altre linee omologhe qualunque.

Chiamiamo S la superficie del primo poligono; questa superficie è omogenea al quadrato p^2; bisogna dunque che

$\frac{S}{p^2}$ sia un numero, che non contenga se non se gli angoli A, B, A′, B′, etc., di modo che si avrà $S=p^2\varphi:(A, B, A', B', \text{etc.})$. Per la medesima ragione, se S′ è la superficie del secondo poligono, si avrà $S'=p'^2\varphi:(A, B, A', B', \text{etc.})$. Dunque $S : S' :: p^2 : p'^2$; dunque *le superficie delle figure simili stanno tra loro come i quadrati dei lati omologhi.*

Passiamo adesso ai poliedri. Si può supporre che una faccia è determinata per mezzo di un lato cognito p, e di più angoli A, B, C, etc. In seguito i vertici degli angoli solidi, fuori di questa base, saranno determinati ciascuno per mezzo di tre dati che si possono riguardare come altrettanti angoli; di tal maniera che la determinazione intera del poliedro dipende da un lato p e da più angoli A, B, C, il cui numero varia secondo la natura del

poliedro. Ciò posto, una linea che unisce due vertici, ovvero, più generalmente, ogni linea x condotta in una maniera determinata nel poliedro sarà una funzione dei dati

p, A, B, C, etc.; e siccome $\frac{x}{p}$ dev' essere un numero,

la funzione eguale a $\frac{x}{p}$ non conterrà se non che gli angoli

A, B, C, etc., onde si potrà supporre $x=p\varphi:(A, B, C, etc.)$.

La superficie del solido è omogenea a p^2; perciò questa superficie può rappresentarsi da $p^2\psi:(A, B, C, etc.)$; la sua solidità è omogenea a p^3, e si può in conseguenza rappresentare per $p^3\Pi:(A, B, C, etc.)$, essendo le funzioni indicate da ψ e Π indipendenti da p.

Supposto costruito un secondo solido coi medesimi angoli A, B, C, etc., ed un lato p' differente da p. Noi chiameremo i solidi così costrutti *solidi simili*; e, ciò posto, la linea, che era $p\varphi:(A, B, C, etc.)$, o semplicemente $p\varphi$ in un solido, sarà $p'\varphi$ in un altro; la superficie che era $p^2\psi$ in uno, sarà $p'^2\psi$ nel secondo, e finalmente la solidità che era $p^3\Pi$ in uno, sarà $p'^3\Pi$ nell' altro. Dunque 1.° *i solidi simili ànno i lati o linee omologhe proporzionali*; 2.° *le loro superficie stanno come i quadrati dei lati omologhi*; 3.° *le loro solidità stanno come i cubi di questi medesimi lati.*

Gli stessi principî s' applicano facilmente al cerchio. Sia c la circonferenza ed s la superficie del cerchio, il cui raggio è r; poichè non vi posson esser due cerchi diseguali descritti col medesimo raggio, le quantità $\frac{c}{r}$ ed $\frac{s}{r^2}$ devon essere funzioni determinate di r. Ma siccome queste quantità sono numeri, esse non debbono contenere nella loro espressione la linea r; laonde si avrà $\frac{c}{r}=\alpha$, ed $\frac{s}{r^2}=\beta$, α e β essendo numeri costanti. Sia c' la circonferenza ed s' la superficie di un altro cerchio, il cui raggio è r'; dunque si avrà ancora $\frac{c'}{r'}=\alpha$, e $\frac{s'}{r'^2}=\beta$. Dunque

$c : c' :: r : r'$ ed $s : s' :: r^2 : r'^2$; dunque *le circonferenze dei cerchi sono come i loro raggi, e le loro superficie come i quadrati dei medesimi raggi.*

Consideriamo un settore, del quale r sia il raggio ed A l'angolo al centro; sia x l'arco che termina il settore, y la superficie di questo medesimo settore. Poichè il settore è interamente determinato quando si conoscono r ed A bisogna che x ed y sieno funzioni determinate di r ed A; dunque $\frac{x}{r}$ ed $\frac{y}{r^2}$ son pure simili funzioni. Ma $\frac{x}{r}$ è un numero, come pure $\frac{y}{r^2}$; dunque queste quantità non debbono contenere r e sono semplicemente funzioni di A; di modo che si avrà $\frac{x}{r} = \varphi : A$, ed $\frac{y}{r} = \psi : A$. Sieno ora x' ed y' l'arco e la superficie di un altro settore, il cui angolo è A ed il raggio r'; chiameremo questi due settori *settori simili;* e poichè l'angolo A è eguale da una parte e dall'altra, si avrà $\frac{x'}{r'} = \varphi : A$, ed $\frac{y'}{r'^2} = \varphi : A$. Dunque $x : x' :: r : r' :: r^2 : r'^2$; dunque *gli archi simili ovvero gli archi de' settori simili son proporzionali ai raggi, ed i medesimi settori son proporzionali ai quadrati de' raggi.*

È chiaro che si dimostrerebbe nella stessa maniera che le sfere stanno come i cubi dei loro raggi.

Si suppone in tutto ciò che precede, che le superficie si misurano col prodotto di due linee, e le solidità col prodotto di tre; ciò è facile a dimostrarsi anche col mezzo dell'analisi. Consideriamo un rettangolo, le cui dimensioni sieno p e q, e la sua superficie, ch'è una funzione di p e q, rappresentiamola con $\varphi : (p, q)$. Se si consideri un altro rettangolo, le cui dimensioni sieno $p+p'$ e q, è chiaro che questo rettangolo è composto di due altri, uno che à per dimensioni p e q, l'altro che à per dimensioni p' e q; di modo che si avrà

$$\varphi : (p+p'\, q) = \varphi : (p, q) + \varphi : (p', q).$$

Sia $p' = p$, si avrà $\varphi : (2p, q) = 2\, \varphi\, (p, q)$. Sia

$p'=2p$, si avrà $\varphi(3p, q) = \varphi(p, q) + \varphi(2p, q) = 3\varphi(p, q)$. Sia $p' = 3p$, si avrà $\varphi(4p, q) = \varphi(p, q) + \varphi(3p, q) = 4\varphi(p, q)$. Dunque in generale, se k è un numero intero qualunque, si avrà $\varphi(kp, q) = k\varphi(p, q)$, ovvero $\frac{\varphi(p, q)}{p} = \frac{\varphi(kp, q)}{kp}$.

Resulta da ciò che $\frac{\varphi(p, q)}{p}$ è una funzione tale di p che non cambia mettendo in luogo di p un multiplice qualunque kp. Dunque questa funzione è indipendente da p, e non dee contenere che q. Ma per una simil ragione $\frac{\varphi(p, q)}{q}$ dee essere indipendente da q; dunque $\frac{\varphi(p, q)}{pq}$ non contiene nè p nè q; e così questa quantità dee ridursi ad una costante α. Dunque si avrà $\varphi(p, q) = \alpha pq$; e siccome nulla impedisce di prendere $\alpha = 1$, si avrà $\varphi(p, q) = pq$; e così la superficie di un rettangolo è eguale al prodotto delle sue due dimensioni.

Si dimostrerebbe in una maniera assolutamente simile che la solidità di un parallelepipedo rettangolo, le cui dimensioni sono p, q, r, è eguale al prodotto pqr delle sue tre dimensioni.

Osserveremo, del resto, che la considerazione delle funzioni che somministra una dimostrazione semplicissima delle proposizioni fondamentali della geometria è stata digià con successo impiegata per dimostrare i principî fondamentali della Meccanica. (*Vedete le Memorie di Torino , Tomo II*).

In fine, quantunque la teorica precedente sia stabilita sulle fondamenta più solide , non dobbiamo dissimulare ch'essa è stata attaccata da M. Leslie, celebre professore di Edimburg, ne'suoi elementi di geometria, 2.ª e 3.ª edizione ; ma senza entrare in alcun dettaglio a questo soggetto, ci basterà dire che le obbiezioni di M. Leslie sono state pienamente rifiutate, primo da M. Playfair, suo concittadino, nell' *Edimburg Review* Tomo XX, ed in seguito da M. Maurice dell'Accademia delle scienze di Parigi nella *Biblioteca universale* di Genova, Ottobre 1819.

Si può vedere ancora la discussione di queste medesime obbiezioni nell' edizione inglese de' nostri elementi di M. David Brewster, Edimbourg 1822.

NOTA TERZA

Sull' approssimazione della proposizione XVI, libro IV.

Allorchè si è trovato un raggio eccedente ed uno deficiente che non differiscono nelle prime cifre numeriche, si può terminare il calcolo in una maniera prontissima per mezzo di una formola algebrica.

Sia a il raggio deficiente e b l'eccedente, la cui differenza è piccola; sieno a' e b' i raggi seguenti, i quali si deducono dalle formole $b'=\sqrt{ab}$, $a'=\sqrt{\left(a.\frac{a+b}{2}\right)}$. Ciò che si cerca è l' ultimo termine della serie a, a', a'', etc., che è nel medesimo tempo quello della serie b, b', b'', etc. Chiamiamo quest' ultimo termine x, e sia $b=a\,(1+\omega)$; si potrà supporre $x=a\,(1+P\omega+Q\omega^2+\text{etc.})$, P e Q essendo coefficienti indeterminati. Ora i valori di b' ed a' danno

$$b'=a\left(1+\frac{1}{2}\omega-\frac{1}{8}\omega^2+\text{etc.}\right),$$

$$a'=a\left(+\frac{1}{4}\omega-\frac{1}{32}\omega^2+\text{etc.}\right).$$

E se si fa parimente $b'=a'\,(1+\omega')$ si avrà

$$\omega'=\frac{1}{4}\omega-\frac{5}{32}\omega^2+\text{etc.}$$

Ma il valore di x dev' essere lo stesso, sia che la serie a, a', a'' etc. cominci per a o per a'; dunque si avrà

$$a\,(1+P\omega+Q\omega^2+\text{etc.})=a'\,(1+P\omega'+Q\omega'^2+\text{etc.}).$$

Sostituendo in questa equazione i valori di a' e di ω' in a e ω, e paragonando i termini simili, se ne dedurrà $P=\frac{1}{3}$, e $Q=-\frac{1}{45}$; dunque

$$x = a\left(1 + \frac{1}{3}\omega - \frac{1}{15}\omega^2\right).$$

Se i raggi a e b si accordino nella prima metà delle loro cifre, si potrà trascurare il termine ω^2, ed il valor precedente si ridurrà ad $x = a\left(1 + \frac{1}{3}\omega\right) = a + \frac{b-a}{3}$.

Così facendo $a=1,1282657$, e $b=1,1286063$, se ne dedurrà immediatamente $x=1,1283792$.

Se i raggi a e b non si accordino se non che nel primo terzo delle loro cifre, bisognerà prendere tre termini della formola precedente; così facendo $a=1,1265639$, e $b=1,1320149$, si troverà $x=1,1283791$.

Si potrebbe supporre che a e b fossero meno prossimi tra loro; ma allora bisognerebbe calcolare il valore di x mediante un numero maggiore di termini.

L' approssimazione della proposizione XIV, che è di Giacomo Gregory, è suscettibile di simigliante compendio. Noi rimandiamo all'opera di quest'autore intitolata: *Vera circuli et hyperbolae quadratura;* opera di gran merito per il tempo in che comparve alla luce.

NOTA QUARTA

Ove si dimostra che il rapporto della circonferenza al diametro e del suo quadrato sono numeri irrazionali.

Consideriamo la serie infinita

$$1 + \frac{a}{z} + \frac{1}{2}\cdot\frac{a^2}{z.\,z+1} + \frac{1}{2.3}\cdot\frac{a^3}{z.\,z+1\,.\,z+2} + \text{etc.}$$

cui il termine generale è

$$\frac{1}{1.\,2.\,3..\,n}\cdot\frac{a^n}{z.z+1\;z+2....\,(z+n-1)},$$

e supponiamo che $\varphi : z$ ne rappresenti la somma. Se si pone $z+1$ in vece di z, $\varphi : (z+1)$ sarà parimente la somma della serie

$$1+\frac{a}{z+1}+\frac{1}{z}\cdot\frac{a^2}{z+1\,.\,z+2}+\frac{1}{2.3}\cdot\frac{a^3}{z+1\,.\,z+2\,.\,z+3}+\text{etc.}$$

Sottraendo una dall' altra queste due serie termine a termine avremo $\varphi : z - \varphi : (z+1)$ per la somma del resto che sarà

$$\frac{a}{z.\,z+1}+\frac{a^2}{z.\,z+1\,.\,z+2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{a^3}{z.\,z+1\,.\,z+2\,.\,z+3}+\text{etc.}$$

Ma questo resto può essere messo sotto la forma

$$\frac{a}{z.\,z+1}\cdot\left(1+\frac{a}{z+2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{a}{z+2\,.\,z+3}+\text{etc.}\right);$$

ed allora si riduce ad $\frac{a}{z\,.\,z+1}\,\varphi : (z+2)$. Dunque si avrà generalmente

$$\varphi : z - \varphi : (z+1) = \frac{a}{z\,.z+1}\,\varphi : (z+2).$$

Dividiamo questa equazione per $\varphi : (z+1)$, e per rendere semplice il risultato, sia $\psi : z$ una nuova funzione di z, e tale che $\psi : z = \frac{a}{z}\cdot\frac{\varphi : (z+1)}{\varphi : (z)}$; allora si potrà mettere $\frac{a}{z\,\psi : z}$ in vece di $\frac{\varphi : z}{\varphi : (z+1)}$, e $\frac{(z+1)\,\psi : (z+1)}{a}$ in vece di $\frac{\varphi : (z+2)}{\varphi : (z+1)}$. Fatta dunque la sostituzione, si avrà

$$\psi : z = \frac{a}{z+\psi : (z+1)}.$$

Ma mettendo successivamente in questa equazione $z+1$, $z+2$, etc. in luogo di z, ne resulterà

$$\varphi : (z+1) = \frac{a}{z+1+\varphi : (z+2)},$$

$$\varphi : (z+2) = \frac{a}{z+2+\varphi : (z+3)}, \text{ etc.}$$

Dunque il valore di $\varphi : z$ può esprimersi colla frazione continua

$$\varphi : 2 = \frac{a}{z} + \cfrac{a}{z+1 + \cfrac{a}{z+2 + \text{etc.}}}$$

Reciprocamente questa frazione continua, prolungata all'infinito à per somma $\varphi : z$, o la sua eguale $\frac{a}{z} \cdot \frac{\varphi : (z+1)}{\varphi : z}$

e questa somma, sviluppata in serie ordinarie, è

$$1 + \frac{a}{z+1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{a^2}{z+1 \,.\, z+2} + \text{etc.}$$

$$\frac{a}{z} \cdot \overline{}$$

Sia adesso $z = \frac{1}{2}$, la frazione continua diverrà

$$\cfrac{2a}{1 + \cfrac{4a}{3 + \cfrac{4a}{5 + \text{etc.}}}},$$

nella quale i numeratori, eccettuato il primo, son tutti eguali a $4a$, ed i denominatori formano la serie de' numeri impari, 1, 3, 5, 7, etc. Il valore di questa frazione continua può dunque esprimersi per

$$2a.\frac{1+\frac{4a}{2.3}+\frac{16a^2}{2.3.4.5}+\frac{64a^3}{2.3\ldots7}+\text{etc.}}{1+\frac{4a}{2}+\frac{16a^2}{2.3.4}+\frac{64a^3}{2.3\ldots6}+\text{etc.}}$$

Ma queste serie si rapportano à formole cognite, e si sa che rappresentando con e il numero, il cui logaritmo iperbolico è 1, l' espressione precedente riducesi ad

$$\frac{e^{2\sqrt{a}}-e^{-2\sqrt{a}}}{e^{2\sqrt{a}}+e^{-2\sqrt{a}}}\cdot\sqrt{a};$$

di modo che si avrà in generale

$$\frac{e^{2\sqrt{a}}-e^{-2\sqrt{a}}}{e^{2\sqrt{a}}+e^{-2\sqrt{a}}}\cdot 2\sqrt{a}=\cfrac{4a}{1+\cfrac{4a}{3+\cfrac{4a}{5+\text{etc.}}}}$$

Da ciò resultano due formole principali, secondo che a è positivo o negativo. Sia primieramente $4a=x^2$, si avrà

$$\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}=\cfrac{x}{1+\cfrac{x^2}{3+\cfrac{x^2}{5+\text{etc.}}}}$$

Sia in seguito $4a=-x^2$, ed in virtù della formola cognita

$$\frac{e^{x\sqrt{-1}}-e^{-x\sqrt{-1}}}{e^{x\sqrt{-1}}+e^{-x\sqrt{-1}}}=\sqrt{-1}.\ \text{tang.}\,x,$$ si avrà

$$\text{tang.}\,x=\cfrac{x}{1-\cfrac{x^2}{3-\cfrac{x^2}{5-\cfrac{x^2}{7-\text{etc.}}}}}$$

Questa è la formola che servirà di base alla nostra dimostrazione. Ma bisognerà prima di tutto dimostrare i due lemmi seguenti.

LEMMA PRIMO.

Sia una frazione continua prolungata all' infinito

$$\cfrac{m}{n+\cfrac{m'}{n'+\cfrac{m''}{n''+\text{etc.}}}},$$

nella quale tutti i numeri m, n, m', n', etc. *sono interi positivi o negativi: se si suppone che le frazioni componenti* $\frac{m}{n}, \frac{m'}{n'}, \frac{m''}{n''}$, etc. *sieno tutte minori dell' unità; dico che il valore totale della frazione continua sarà necessariamente un numero irrazionale.*

Dico in primo luogo, che questo valore sarà minore dell' unità. Infatti, senza diminuire la generalità della frazione continua, si possono supporre tutti i denominatori n, n', n'', etc. positivi; ora, se si prenda un sol termine della serie proposta, si avrà, per ipotesi, $\frac{m}{n} < 1$.

Se si prendano i due primi, per $\frac{m'}{n'} < 1$, è chiaro che $n+\frac{m'}{n'}$ è maggiore di $n-1$; ma m è minore di n, e poichè l'uno e l'altro son numeri interi, m sarà ancora minore di $n+\frac{m'}{n'}$. Dunque il valore che resulta da due termini

$$\cfrac{m}{n+\cfrac{m'}{n'}}$$

è minore dell' unità. Calcoliamo tre termini della frazione continua proposta, ed in primo luogo, conforme a ciò che

abbiamo veduto, il valore della parte

$$\frac{m'}{n'}+\frac{m''}{n''}$$

sarà minore dell'unità. Chiamiamo questo valore ω, ed è chiaro che $\frac{m}{n+\omega}$ sarà pure minore dell' unità; dunque il valore, che resulta da tre termini

$$\frac{m}{n}+\frac{m'}{n'}+\frac{m''}{n''},$$

è minore dell'unità. Continuando il medesimo ragionamento, si vedrà che, qualunque sia il numero dei termini che si calcolano della frazione continua proposta, il valore che ne risulta è minore dell' unità; dunque il valore totale di questa frazione prolungata all' infinito è pure minore dell' unità. Esso non potrà essere eguale all' unità se non che nel caso che la frazione proposta fosse della forma

$$\cfrac{m}{m+1-\cfrac{m'}{m'+1-\cfrac{m''}{m''+1-\text{etc.}}}}$$

in qualunque altro caso sarebbe sempre minore.

Ciò posto, se si nega che il valore della frazione continua proposta sia eguale ad un numero irrazionale, supponiamo che sia eguale ad un numero razionale, e sia questo numero $\frac{B}{A}$, B ed A essendo numeri interi qualunque; si avrà dunque

$$\frac{B}{A}=\frac{m}{n}+\frac{m'}{n'}+\frac{m''}{n''}+\text{etc.}$$

Sieno C, D, E, etc. numeri indeterminati tali che si abbia

$$\frac{C}{B}=\frac{m'}{n'}+\frac{m''}{n''}+\frac{m'''}{n'''}+\text{etc.},$$

$$\frac{D}{C}=\frac{m''}{n''+\frac{m'''}{n'''+\frac{m^{iv}}{n^{iv}+\text{etc.},}}}$$

e così all'infinito. Queste differenti frazioni continue avendo tutti termini minori dell'unità, i loro valori o somme $\frac{B}{A}$, $\frac{C}{B}$, $\frac{D}{C}$, $\frac{E}{D}$, etc. saranno, secondo ciò che abbiamo dimostrato, minori dell' unità, e così si avrà B<A, C<B, D<C, etc.; di modo che la serie A, B, C, D, E, etc. sarà decrescente all'infinito. Ma il concatenamento delle frazioni continue cui si tratta dà

$\frac{B}{A}=\frac{m}{n+\frac{C}{B}}$; d' onde resulta $C=mA-nB$;

$\frac{C}{B}=\frac{m'}{n'+\frac{D}{C}}$; d' onde resulta $D=m'B-n'C$;

$\frac{D}{C}=\frac{m''}{n''+\frac{E}{D}}$; d' onde resulta $E=m''C-n''D$;

etc. etc.

E poichè i due primi numeri A e B sono interi, per supposizione, ne segue che tutti gli altri C, D, E, etc., che fino ad ora erano indeterminati, sono pure numeri interi. Ora, implica contraddizione che una serie infinita A, B, C, D, E, etc. sià nel tempo stesso decrescente e composta di numeri interi, perchè d' altronde nessuno de' numeri A, B, C, D, E, etc. può essere zero, a motivo che la frazione continua proposta si estende all' infinito, e che le somme rappresentate da $\frac{B}{A}$, $\frac{C}{B}$, $\frac{D}{C}$, etc. debbono essere sempre di qualche valore. Dunque

l' ipotesi che la somma della frazione continua proposta sia eguale ad una quantità razionale $\frac{B}{A}$, non può mai sussistere. Dunque questa somma è necessariamente un numero irrazionale.

LEMMA SECONDO.

Poste le medesime cose, se le frazioni componenti $\frac{m}{n}, \frac{m'}{n'}, \frac{m''}{n''}$, etc. *sono di una grandezza qualunque al principio della serie, ma che dopo un certo intervallo esse sieno costantemente minori dell' unità ; dico che la frazione continua proposta , supponendo sempre che dessa si estenda all' infinito , avrà un valore irrazionale.*

Infatti, se a contare da $\frac{m'''}{n'''}$, per esempio, tutte le frazioni $\frac{m'''}{n'''}, \frac{m^{\text{IV}}}{n^{\text{IV}}}, \frac{m^{\text{V}}}{n^{\text{V}}}$, etc. all'infinito sono minori dell' unità , allora , secondo il lemma I , la frazione continua

$$\cfrac{m'''}{n''' + \cfrac{m^{\text{IV}}}{n^{\text{IV}} + \cfrac{m^{\text{V}}}{n^{\text{V}} + \text{etc.}}}}$$

avrà un valore irrazionale. Chiamiamo questo valore ω; e la frazione continua proposta diventerà

$$\cfrac{m}{n + \cfrac{m'}{n' + \cfrac{m''}{n'' + \omega.}}}$$

Ma se si fa successivamente

$$\frac{m''}{n''+\omega}=\omega', \frac{m'}{n'+\omega'}=\omega'', \frac{m}{n+\omega''}=\omega''',$$

è chiaro che, ω essendo irrazionale, tutte le quantità ω', ω'', ω''' lo debbono essere parimente. Ora, l'ultima ω''' è eguale alla frazione continua proposta; dunque il valore di questa è irrazionale.

Possiamo adesso, per ritornare al nostro obbietto, dimostrare questa proposizione generale.

TEOREMA.

Se un arco è commensurabile col raggio, la sua tangente sarà incommensurabile col medesimo raggio.

Infatti, sia il raggio$=1$, e l'arco $x=\frac{m}{n}$, m ed n essendo numeri interi, la formola trovata di sopra darà, facendo la convenevole sostituzione,

$$tang.\frac{m}{n}=\cfrac{m}{n-\cfrac{m^2}{3n-\cfrac{m^2}{5n-\cfrac{m^2}{7n-\text{etc.}}}}}$$

Ora questa frazione continua è nel caso del lemma II; perchè è chiaro che i denominatori $3n$, $5n$, $7n$, etc. aumentando continuamente, mentre che il numeratore m^2 resta della stessa grandezza, le frazioni componenti saranno o diverranno ben presto minori dell' unità; dunque il valore di $tang.\ \frac{m}{n}$ è irrazionale; dunque, *se l'arco è commensurabile col raggio, la sua tangente sarà incommensurabile.*

Da ciò resulta come immediatissima conseguenza la proposizione che forma l'oggetto di questa nota. Sia π la semicirconferenza, il cui raggio è 1; se π fosse razionale, l'arco $\frac{\pi}{4}$ lo sarebbe pure, e per conseguenza la sua tangente dovrebbe essere irrazionale: ma si sa, pel contrario, che la tangente dell'arco $\frac{\pi}{4}$ è eguale al raggio 1;

dunque π non può essere razionale. Dunque *il rapporto della circonferenza al diametro è un numero irrazionale*(1).

È probabile che il numero π non sia compreso tra gl' irrazionali algebrici, vale a dire che non possa essere la radice di una equazione algebrica di un numero finito di termini i cui coefficienti sono razionali: ma sembra difficilissimo poter dimostrare rigorosamente questa proposizione; noi possiamo solo far vedere che il quadrato di π è pure un numero irrazionale.

Infatti, se nella frazione continua che esprime tang. x, si fa $x=\pi$, a causa di tang. $\pi=0$, si dee avere

$$0=3-\cfrac{\pi^2}{5-\cfrac{\pi^2}{7-\cfrac{\pi^2}{9-\text{etc.}}}}$$

Ma se π^2 fosse razionale, e si avesse $\pi^2=\frac{m}{n}$, m ed n essendo numeri interi, ne resulterebbe

$$3=\cfrac{m}{5n-\cfrac{m}{7n-\cfrac{m}{9n-\cfrac{m}{11n-\text{etc.}}}}}$$

Ora è visibile che questa frazione continua è pure nel caso del lemma II; il suo valore è dunque irrazionale, e non può essere eguale al numero 3. Dunque *il quadrato del rapporto della circonferenza al diametro è un numero irrazionale.*

(1) *Questa proposizione è stata dimostrata per la prima volta da Lambert nelle Memorie di Berlino, anno 1761.*

NOTA QUINTA

Ove si dà la soluzione analitica di diversi problemi relativi al triangolo, quadrilatero iscritto, parallelepipedo, e piramide triangolare.

PROBLEMA PRIMO.

Essendo dati i tre lati di un triangolo, trovare la sua superficie, il raggio del cerchio iscritto ed il raggio del cerchio circoscritto.

Sieno i lati $BC=a$, $AC=b$, $AB=c$ (*fig. 126*); se dal vertice A si abbassi la perpendicolare AD sopra il lato opposto BC, si avrà (*Prop. 12, lib. III*)

Fig. 126.

$$\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 - 2BC \times BD;$$

dunque

$$BD = \frac{a^2+c^2-b^2}{2a}.$$

Questo valore dà

$$\overline{AB}^2 - \overline{BD}^2 \text{ ovvero } \overline{AD}^2 = c^2 - \left(\frac{a^2+c^2-b^2}{2a}\right) =$$

$$\frac{4a^2c^2-(a^2+c^2-b^2)^2}{2a^2}; \text{ dunque } AD = \frac{\sqrt{[4a^2c^2-(a^2+c^2-b^2)^2]}}{2a}.$$

Sia S l' area del triangolo, si avrà $S = \frac{1}{2} BC \times AD$;

dunque

$$S = \frac{1}{4}\sqrt{[4a^2c^2-(a^2+c^2-b^2)^2]} = \frac{1}{4}\sqrt{[2a^2b^2+2a^2c^2 +2b^2c^2-a^4-b^4-c^4]}.$$

Questa formola può ancora ridursi ad un' altra forma

più comoda pel calcolo logaritmico; a quale oggetto bisogna osservare che la quantità $4a^2c^2 - (a^2+c^2-b^2)^2$ è il prodotto dei due fattori $2ac + (a^2 + c^2 - b^2)$, e $2ac - (a^2 + c^2 - b^2)$, il primo $= (a + c)^2 - b^2 = (a + c + b)(a + c - b)$; il secondo $= b^2 - (a-c)^2 = (b + a - c)(b - a + c)$; dunque si avrà

$$S = \frac{1}{4} \sqrt{[(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)]}.$$

Finalmente, se si fa $\frac{a+b+c}{2} = p$, ciò che dà $a+b+c = 2p$, $a + b - c = 2p - 2c$, $a + c - b = 2p - 2b$, $b + c - a = 2p - 2a$, si avrà ancora più semplicemente

$$S = \sqrt{(p \cdot p - a \cdot p - b \cdot p - c)}.$$

Dal che si vede che per avere la superficie di un triangolo rettilineo, cui sono dati i tre lati, bisogna prendere la semisomma dei tre lati, da questa semisomma togliere successivamente ciascuno dei lati, il che darà tre resti, moltiplicare questi tre resti tra loro e per la semisomma dei lati; e finalmente estrarre la radice quadrata dal prodotto: questa radice sarà l' area del triangolo.

Sia adesso z il raggio del cerchio circoscritto al triangolo ed u il raggio del cerchio iscritto in questo medesimo triangolo; si avrà, secondo la prop. XXXII, lib. III,

$$z = \frac{\frac{1}{4}abc}{S}, \text{ed } u = \frac{2S}{a+b+c} = \frac{S}{p};$$ dunque sostituendo il valore trovato di S, verrà

$$z = \frac{\frac{1}{4}abc}{\sqrt{(p.p-a.p-b.p-c)}}, \quad u = \sqrt{\left(\frac{p-a.p-b.p-c}{p}\right)}$$

PROBLEMA SECONDO.

Essendo dati i quattro lati di un quadrilatero iscritto in un cerchio, trovare il raggio del cerchio, la superficie del quadrilatero ed i suoi angoli.

Sieno i lati dati AB $=a$, BD $=b$, CD $=c$, CA$=d$ (*fig. 277*), e le diagonali incognite AD$=x$, BC$=y$; si avrà, secondo il teorema 33 del lib. III, $xy=ac+bd$ ed $\frac{x}{y}=\frac{ad+bc}{ab+cd}$; donde si ricava

Fig. 277.

$$x=\sqrt{\left(\frac{(ac+bd)(ad+bc)}{ab+cd}\right)},\ y=\sqrt{\left(\frac{(ac+bd)(ab+cd)}{ad+bc}\right)}.$$

Ma, secondo il problema precedente, il raggio del cerchio circoscritto al triangolo ABD, i cui lati sono a, b, x, può esprimersi con la formola

$$z=\frac{abx}{\sqrt{[4a^2b^2-(a^2+b^2-x^2)^2]}}.$$

Sostituendo invece di x il valore che abbiamo trovato, e decomponendo il resultato in fattori, si avrà

$$z=\sqrt{\left(\frac{(ac+bd)(ad+bc)(ab+cd)}{(a+b+c-d)(a+b+d-c)(a+c+d-b)(b+c+d-a)}\right)}.$$

Ciò posto, l'area del triangolo ABD$=\frac{\frac{1}{4}abx}{z}$; quella del triangolo ACD $=\frac{\frac{1}{4}cdx}{z}$; dunque l'area del quadrilatero ABDC$=\frac{1}{4}\frac{(ab+cd)x}{z}=\frac{1}{4}\sqrt{[(a+b+c-d)(a+b+d-c)}$ $(a+c+d-b)(b+c+d-a)]$.

E se si facesse, per abbreviare,

$$p=\frac{1}{2}(a+b+c+d),$$

si avrà l'area ABDC $=\sqrt{[(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)]}$. Finalmente per avere qualunque degli angoli, per esempio l' angolo B, si osserverà che il triangolo ABD da $\cos B = \frac{a^2+b^2-x^2}{2ab}$; sostituendo il valore di x, e riducendo, si avrà $\cos B = \frac{a^2+b^2-c^2-d^2}{2ab=2cd}$. Da ciò si ricava $\frac{1-\cos B}{1+\cos B}$, ovvero $tang^2.\frac{1}{2}B=\frac{(c+a)^2-(a-b^2}{(a+b)^2-(c-d)^2}=\frac{(a+c+d-b)(b+c+d-a)}{(a+b+c-d)(a+b+d-c)}$.
Dunque $tang.\ \frac{1}{2}B=\sqrt{\left(\frac{p-a\ .\ p-b}{p-c\ .\ p-d}\right)}$.

PROBLEMA TERZO.

Fig. 277. *Nel quadrilatero* ABDC (*fig.* 277), *cui gli angoli opposti* B *e* C *sono retti, essendo dati i due lati* AB, AC *con l' angolo contenuto* BAC, *trovare gli altri due lati e la diagonale* AD.

Sia AC $=b$, AB $=c$, e l'angolo BAC $=$ A ; se si prolunghino BD ed AC fino al loro incontro in E, il triangolo BAE rettangolo in B, cui si conoscono l'angolo BAE ed il lato AB, darà AE $=\frac{c}{\cos A}$; dunque CE $=\frac{c}{\cos A}-b$. In seguito il triangolo DCE rettangolo in C, del quale si conoscono il lato CE e l' angolo CDE $=$ A , darà CD $=$ CE $\cot A=\frac{c-b\cos A}{sen\ A}$. Si avrà dunque similmente BD $=\frac{b-c\cos A}{sen\ A}$. Questi sono i valori de' due lati cercati del quadrilatero.

Da ciò resulta la diagonale $AD=\sqrt{(\overline{AB}^2+\overline{DC}^2)}=$
$$\sqrt{\left(b^2+\frac{(c-b\cos A)^2}{sen^2 A}\right)}=\frac{\sqrt{(b^2+c^2-2bc\cos A)}}{sen\ A}.$$
Ma pel triangolo BAC si avrà $BC=\sqrt{(b^2+c^2-2bc\cos A)}$. Dunque la diagonale AD che unisce i due angoli obbliqui sta alla diagonale BC che unisce i due angoli retti :: 1 : *sen* A.

Scolio. La diagonale AD è nel tempo stesso il diametro del cerchio nel quale il quadrilatero ABDC sarebbe iscritto.

In questo cerchio si avrebbe l' angolo ABC = ADC; dunque abbassando CF perpendicolare sopra AB, i triangoli BFC, ADC sono simili, e danno AD : BC :: AC : FC :: 1 : *sen* A ; il che si accorda col resultato precedente.

PROBLEMA QUARTO.

Essendo date le tre costole di un parallelepipedo con gli angoli ch' esse fanno tra loro, trovare la solidità del parallelepipedo.

Sieno le costole $SA=f$, $SB=g$, $SC=h$ (*fig.* 278) Fig. 278. e gli angoli contenuti $ASB=\gamma$, $ASC=\beta$, $BSC=\alpha$. Se dal punto C si abbassi CO perpendicolare sul piano ASB, il triangolo rettangolo CSO darà $CO=CS\ sen\ CSO=h\ sen\ CSO$. D'altronde la superficie del parallelogrammo $ASBP=fg\ sen\ \gamma$. Dunque, se si chiami S la solidità del parallelepipedo ST, si avrà $S=fgh\ sen\ \gamma\ sen\ CSO$. Resta a trovare *sen* CSO.

Per questo, dal punto S, come centro, e con un raggio=1, descrivete una superficie sferica che incontri in D, E, F, G, le rette SA, SB, SC, SO, avrete un triangolo DEF, nel quale l' arco FG è perpendicolare sopra ED, poichè il piano CSO è perpendicolare sopra ASB. Ora il triangolo DEF, del quale si ànno i tre lati $DE=\gamma$, $DF=\beta$, $EF=\alpha$, dà

$$\cos E = \frac{\cos\beta - \cos\alpha\cos\gamma}{\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\gamma},$$

e

$$\operatorname{sen} E = \frac{\sqrt{(1-\cos^2\alpha-\cos^2\beta-\cos^2\gamma+2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma)}}{\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\gamma}.$$

Dippiù il triangolo rettangolo EFG dà *sen* GF ovvero *sen* CSO $=$ *sen* E *sen* EF $=$ *sen* α *sen* E. Dunque $S = fgh$ *sen* α *sen* γ *sen* E, ovvero

$$S = fgh\sqrt{(1-\cos^2\alpha-\cos^2\beta-\cos^2\gamma+2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma)}.$$

In questa espressione la quantità sotto il radicale è il prodotto di due fattori

$$\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\gamma + \cos\beta - \cos\alpha\cos\gamma,$$

e

$$\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\gamma - \cos\beta + \cos\alpha\cos\gamma.$$

Il primo $= \cos\beta - \cos(\alpha+\gamma) = 2\operatorname{sen}\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}.$ $\operatorname{sen}\frac{\alpha+\gamma-\beta}{2}$; il secondo $= \cos(\alpha-\gamma) - \cos\beta = 2\operatorname{sen}\frac{\alpha+\beta-\gamma}{2}\operatorname{sen}\frac{\beta+\gamma-\alpha}{2}$. Dunque la solidità cercata

$$S = 2fgh\sqrt{\left(\operatorname{sen}\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}\operatorname{sen}\frac{\alpha+\beta-\gamma}{2}\operatorname{sen}\frac{\alpha+\gamma-\beta}{2}\operatorname{sen}\frac{\beta+\gamma-\alpha}{2}\right)}.$$

PROBLEMA QUINTO.

Poste le medesime cose che nel precedente problema, trovare l' espressione della diagonale che unisce due vertici opposti.

Fig. 278. Sia la diagonale della base $SP = z$ (*fig. 278*), e la diagonale cercata $ST = u$. Il triangolo ASP nel quale *cos* SAP $= -$*cos* γ, darà $z^2 = f^2 + g^2 + 2fg\cos\gamma$; parimente il triangolo TPS, nel quale *cos* TSP $= -$*cos* CSP, darà $u^2 = z^2 + h^2 + 2hz\cos$ CSP. Non si tratta adesso che di avere

il coseno dell' angolo CSP o dell' arco FH: ora nel triangolo sferico EFH, si à $\cos$ FH $= \cos$ EF $\cos$ EH $+ \operatorname{sen}$ EF sen EH $\cos$ E, sostituendo i valori

EF$=\alpha$, e $\cos \mathrm{E} = \dfrac{\cos\beta - \cos\alpha\cos\gamma}{\operatorname{sen}\alpha\,\operatorname{sen}\gamma}$, verrà $\cos \mathrm{FH} = \cos\alpha$

$$\cos \mathrm{EH} + \frac{\operatorname{sen} \mathrm{EH}}{\operatorname{sen}\gamma}(\cos\beta - \alpha\cos\gamma) = \frac{\operatorname{sen} \mathrm{EH}\cos\beta}{\operatorname{sen}\gamma} +$$

$$\frac{\operatorname{sen}(\gamma - \mathrm{EH}.\cos\alpha}{\operatorname{sen}\gamma} = \frac{\operatorname{sen} \mathrm{HE}\cos\beta}{\operatorname{sen}\gamma} + \frac{\operatorname{sen} \mathrm{DH}\cos\alpha}{\operatorname{sen}\gamma}.$$

Dunque $2\,h\,z\cos$ FH, ovvero $2\,h\,z\cos$ CSP $=$

$$2\,h\cos\beta.\frac{z\operatorname{sen} \mathrm{EH}}{\operatorname{sen}\gamma} + 2\,h\cos\alpha.\frac{z\operatorname{sen} \mathrm{DH}}{\operatorname{sen}\gamma}.$$

Ma nel triangolo BSP si à

$$\mathrm{BP} = \frac{\mathrm{SP}\operatorname{sen} \mathrm{BSP}}{\operatorname{sen} \mathrm{SBP}},\ \text{e}\ \mathrm{BS}\ \frac{\mathrm{SP}\operatorname{sen} \mathrm{BPS}}{\operatorname{sen} \mathrm{SBP}},$$

il che dà

$$\frac{z\operatorname{sen} \mathrm{EH}}{\operatorname{sen}\gamma} = f,\ \text{e}\ \frac{z\operatorname{sen} \mathrm{DH}}{\operatorname{sen}\gamma} = g.$$

Dunque $2\,h\,z\cos \mathrm{CSP} = 2f\,h\cos\beta + 2g\,h\cos\alpha$. Dunque finalmente il quadrato della diagonale cercata, $u^2 = f^2 + g^2 + h^2 + 2\,f\,g\cos\gamma + 2\,f\,h\cos\beta + 2g\,h\cos\alpha$.

Corollario. L' angolo solido A è formato dalle tre costole f, g, h, che fanno tra loro, due a due, gli angoli $200^\circ - \gamma$; $200^\circ - \beta$, α, così basta cangiare i segni di $\cos\gamma$ e $\cos\beta$ nell' espressione di $\overline{\mathrm{SE}}^2$ per avere quella di $\overline{\mathrm{AM}}^2$. Facendo lo stesso per le altre due diagonali, si avranno i valori dei loro quadrati, come appresso:

$$\overline{\mathrm{ST}}^2 = f^2 + g^2 + h^2 + 2fg\cos\gamma + 2fh\cos\beta + 2gh\cos\alpha,$$

$$\overline{\mathrm{AM}}^2 = f^2 + g^2 + h^2 - 2fg\cos\gamma - 2fh\cos\beta + 2gh\cos\alpha,$$

$$\overline{BN}^2=f^2+g^2+h^2-2fg\cos\gamma+2fh\cos\beta-2gh\cos\alpha,$$

$$\overline{CP}^2=f^2+g^2+h^2+2fg\cos\gamma-2fh\cos\beta-2gh\cos\alpha.$$

Da ciò si ricava

$$\overline{ST}^2+\overline{AM}^2+\overline{BN}^2+\overline{CP}^2=4f^2+4g^2+4h^2.$$

Dunque *in ogni parallelepipedo la somma dei quadrati delle quattro diagonali è eguale alla somma dei quadrati delle dodici costole*. Questo teorema è analogo a quello che à luogo nel parallelogrammo (*Prop. 14, corollario lib. III*), e poteva dedursi immediatamente da quest'ultimo. Poichè, per mezzo dei parallelogrammi SCTP, ABMN si à

$$\overline{ST}^2+\overline{CP}^2=2\overline{SC}^2+2\overline{SP}^2$$

$$\overline{AM}^2+\overline{BN}^2=2\overline{BM}^2+2\overline{AB}^2$$

Sommando queste due equazioni ed osservando che abbiamo

$$SC=BM,\text{ ed }\overline{SP}^2+\overline{AB}^2=2\overline{SA}^2+2\overline{SB}^2,$$

sarà

$$\overline{ST}^2+\overline{AM}^2+\overline{BN}^2+\overline{CP}^2=4\overline{SA}^2+4\overline{SB}^2+4\overline{SC}^2.$$

PROBLEMA SESTO.

Essendo date le tre costole che terminano ad un medesimo vertice di una piramide triangolare, ed i tre angoli che questi spigoli fanno tra loro, trovare la solidità della piramide.

Fig. 278. Sia SABC (*fig. 278*) la piramide triangolare proposta nella quale si conoscano gli spigoli $SA=f$, $SB=g$, $SC=h$, e gli angoli contenuti $ASB=\gamma$, $ASC=\beta$, $BSC=\alpha$. Se sopra le costole SA, SB, SC, date di grandezza e di posizione, si descriva il parallelepipedo ST, la piramide ch' è il terzo del prisma triangolare BSANMC, sarà il sesto del parallelepipedo ST. Dunque, chiamando P la solidità della piramide, si avrà, secondo il problema IV,

$$P=\frac{1}{6}fgh\sqrt{\left(1-\cos^2\alpha-\cos^2\beta-\cos^2\gamma+2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma\right)},o$$

$$P=\frac{1}{3}fgh\sqrt{\left[\,sen\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}sen\frac{\alpha+\beta-\gamma}{2}sen\frac{\alpha+\gamma-\beta}{2}sen\frac{\gamma+\beta-\alpha}{2}\right]}.$$

PROBLEMA SETTIMO.

Essendo dati i sei lati o costole di una piramide triangolare, trovare la sua solidità.

Se si conservino le medesime denominazioni del precedente teorema, e si faccia di più BC=f', CA=g', BA=h', si avrà

$$\cos\gamma=\frac{f^2+g^2-h'^2}{2fg},\cos\beta=\frac{f^2+h^2-g'^2}{2fh},\cos\alpha=\frac{g^2+h^2-f'^2}{2hg}.$$

Sostituendo questi valori nella formola già trovata, e facendo per brevità

$$g^2+h^2-f'^2=F,\ f^2+h^2-g'^2=G,\ f^2+g^2-h'^2=H\ ,$$

si avrà la solidità dimandata

$$P=\frac{1}{12}\sqrt{\left(4f^2g^2h^2-f^2\,F^2-g^2\,G^2-h^2H^2+FGH\right)}.$$

Nell' applicazione di queste formole si osserverà che f', g', h' indicano i lati di una medesima faccia o base, ed f, g, h gli altri tre lati o costole che terminano al vertice, essendo la lor disposizione tale che f è opposto a f', g a g', ed h ad h'.

Scolio. Sia A la somma dei quattro triangoli che compongono la superficie della piramide; sia r il raggio della sfera iscritta; è facile vedere che si à P=A $\times\frac{1}{3}r$; perchè si può concepire la piramide decomposta in quattro altre, che avessero per vertice comune il centro della sfera e per basi le differenti facce della piramide. Si à dunque il raggio della sfera iscritta $r=\frac{3P}{A}$.

Poste le medesime cose che nel problema VI, trovare il raggio della sfera circoscritta alla piramide.

Fig. 279. Sia M (*fig. 279*) il centro del cerchio circoscritto al triangolo SAB, MO la perpendicolare condotta dal punto M sul piano SAB; sia parimente N il centro del cerchio circoscritto al triangolo SAC, ed NO la perpendicolare alzata dal punto N sopra il piano SAC. Queste due perpendicolari situate in un medesimo piano MDN perpendicolare ad SA s' incontreranno in un punto O, che sarà il centro della sfera circoscritta; infatti il punto O, come appartenente alla perpendicolare MO, è egualmente distante dai tre punti S, B, A; e questo medesimo punto, come appartenente alla perpendicolare NO, è egualmente distante dai tre punti S, A, C; dunque esso è egualmente distante dai quattro punti S, A, B, C.

Si può immaginare che il punto M sia determinato nel piano SAB per mezzo del quadrilatero SDMH, cui i due angoli D ed H sono retti, ed ove si à $SD = \frac{1}{2}f$, $SH = \frac{1}{2}g$, $ASB = \gamma$. Dunque si avrà (secondo il problema III)

$$DM = \frac{\frac{1}{2}g - \frac{1}{2}f\cos\gamma}{\operatorname{sen}\gamma}\text{; e similmente si avrà } DN = \frac{\frac{1}{2}h - \frac{1}{2}f\cos\beta}{\operatorname{sen}\beta}.$$

Si chiami D l' angolo MDN che misura l'inclinazione dei due piani SAB, SAC; nel triangolo sferico, cui α, β, γ sono i lati, D sarà l' angolo opposto al lato α, e perciò si avrà $\cos D = \frac{\cos\alpha - \cos\gamma\cos\beta}{\operatorname{sen}\gamma\operatorname{sen}\beta}$, di modo che l' angolo D può essere supposto cognito.

Ciò posto, nel quadrilatero OMDN, cui i due angoli M ed N sono retti, ed i cui due lati MD, DN si conoscono, e l' angolo contenuto $MDN = D$, si avrà per il problema III il quadrato della diagonale

$$\overline{OD}^2 = \frac{\overline{DM}^2 + \overline{DN}^2 - 2DM \times DN \cos D}{sen^2 D}.$$

In seguito, nel triangolo OSD rettangolo in D, si avrà

$$\overline{SO}^2 = \overline{OD}^2 + \overline{SD}^2 ;$$

questo è il valore del quadrato del raggio della sfera circoscritta.

Se si faccia la sostituzione de' valori di DM, DN, ed in seguito quella dei valori $\cos D$ e $sen\ D$, affine di avere immediatamente l' espressione del raggio SO per mezzo dei dati del problema VI, si troverà per ultimo resultato

$$SO = \frac{1}{2} \sqrt{\left\{ \frac{f^2 sen^2\alpha + g^2 sen^2\beta + h^2 sen^2\gamma - 2fg(\cos\gamma - \cos\beta\cos\alpha) - 2fh(\cos\beta - \cos\alpha\cos\gamma) - 2gh(\cos\alpha - \cos\gamma\cos\beta)}{1 - \cos^2\alpha - \cos^2\beta - \cos^2\gamma + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma} \right\}}.$$

NOTA SESTA

Sopra la più corta distanza di due rette non situate nel medesimo piano.

Sieno AB, CD, (*fig. 280*) due rette non poste nel medesimo piano; fa d' uopo trovare la più corta distanza fra loro. Fig. 280.

Per AB facciansi passare due piani perpendicolari tra loro che incontrino CD, uno in C e l' altro in D; dai punti C e D abbassate CA e DB perpendicolari sopra AB; nel piano ABD conducete DE parallela ed AE perpendicolare a BA, ciò che formerà il rettangolo ABDE; nel piano CAE tirate CE e conducete AI perpendicolare a CE. Finalmente nel piano CDE conducete IK parallela a DE fino all' incontro di CD in K; fate AL=IK e tirate KL: dico 1.° che la retta KL è perpendicolare ad un tempo alle due rette AB, CD; 2.° che questa medesima retta KL è la più corta di ogni altra che unisca due punti delle linee AB, CD, e che la stessa KL o la sua eguale AI è la più corta distanza cercata.

Infatti 1.° le tre rette AB, AC, AE essendo per costruzione perpendicolari tra loro, una di esse AB è perpendicolare al pia-

no delle altre due; dunque AB è perpendicolare ad AI: d'altronde KI è parallela a DE, e DE ad AB; dunque KI è parallela ad AB; e poichè si è fatto AL=KI, ne segue che la figura AIKL è un rettangolo. Ciò posto, l'angolo AIK è retto, come pure AIC; dunque la retta AI è perpendicolare al piano KIC ovvero CDE; dunque la sua parallela KL è perpendicolare al medesimo piano CDE, e per conseguenza è perpendicolare a CD. Dunque 1.° la retta KL è perpendicolare ad un tempo alle due rette AB, CD.

2.° Sia M un punto qualunque della retta CD; se per questo punto si conduca MN parallela a DE, ovvero ad AB, la distanza dal punto M della retta AB sarà eguale ad AN, poichè l'angolo BAN è retto. Ora si à AN > AI; dunque AI è la più corta distanza delle linee rette date AB, CD.

Sieno le perpendicolari $CA = a$, e $DB = AE = b$; si avrà $CE = \sqrt{(a^2+b^2)}$; e perchè l'area del triangolo ACE si esprime egualmente con $\frac{1}{2} AC \times AE$, e con $\frac{1}{2} CE \times AI$, si avrà

$$AI = \frac{AC \times EA}{CE} = \frac{ab}{\sqrt{(a^2+b^2)}}.$$

Questa è l'espressione della più corta distanza delle due linee date.

Se nel medesimo tempo si faccia la distanza $AB = c$, e si chiami A l'angolo contenuto tra le due linee date, vale a dire l'angolo CDE contenuto tra la linea CD, ed una parallela DE alla linea AB; il triangolo CDE rettangolo in E darà

$$\cos CDE = \frac{DE}{CD}$$

ovvero

$$\cos A = \frac{c}{\sqrt{(a^2+b^2+c^2)}},$$

poichè si à

$$\overline{CD}^2 = \overline{CE}^2 + \overline{ED}^2 = a^2+b^2+c^2.$$

Da ciò si ricaverebbe ancora

$$sen\ A = \frac{\sqrt{(a^2+b^2)}}{\sqrt{(a^2+b^2+c^2)}},\ e\ cot\ A = \frac{c}{\sqrt{(a^2+b^2)}}.$$

NOTA SETTIMA

Sopra i poliedri simmetrici.

Egli è per maggior semplicità la supposizione fatta nella definizione 16, libro VI, che il piano al quale son riportati i poliedri simmetrici sia il piano di una faccia; si poteva supporre che questo piano fosse un piano qualunque, ed allora la definizione diventava più generale, senza che vi fosse da cangiar nulla nella dimostrazione della proposizione II, nella quale si è stabilita la relazione scambievole dei due poliedri. Si può ancora acquistare una idea giustissima della maniera di esistere di questi due solidi, riguardandone uno de' due come l'immagine dell' altro formata in uno specchio piano, il quale starebbe in luogo del piano del quale si è parlato.

NOTA OTTAVA

Sulla proposizione XXV, libro VII.

Questo teorema che *Eulero* à dimostrato il primo nelle Memorie di Pietroburgo dell' anno 1758 offre più conseguenze, le quali meritano di essere sviluppate.

1.° Sia a il numero dei triangoli, b il numero dei quadrilateri, c il numero dei pentagoni etc. che compongono la superficie di un poliedro; il numero totale delle facce sarà dunque $a+b+c+d+$etc., ed il numero totale de' loro lati sarà $3a+4b+5c+6d$ etc. Quest' ultimo numero è doppio di quello delle costole, poichè la medesima costola appartiene a due facce; perciò si avrà

$$H = a+b+c+d+\text{etc.};$$
$$2A = 3a+4b+5c+6d+\text{etc.}$$

E poichè, secondo il teorema cui si tratta, $S+H=A+2$, si avrà

$$2S = 4+a+2b+3c+4d+\text{etc.}$$

La prima osservazione che ricaviamo da questi valori è che il numero delle facce impari $a+c+e+$ etc. è sempre pari.

Si può fare per brevità $\omega=b+2c+3d+$ etc. ; ed allora si avrà

$$A=\frac{3}{2}H+\frac{1}{2}\omega,$$

$$S=2+\frac{1}{2}H+\frac{1}{2}\omega.$$

Così in ogni poliedro avrassi sempre $A>\frac{3}{2}H$, ed $S>2$

$\frac{1}{2}H$. ove bisogna osservare che il segno $>$ non esclude l'eguaglianza, attesochè si potrebbe avere $\omega=0$.

Il numero di tutti gli angoli piani di un poliedro è $2A$, quello degli angoli solidi è S; di modo che il numero medio degli angoli piani che formano ciascun angolo solido è $\frac{2A}{S}$.

Questo numero non può esser minore di 3, poichè bisognano almeno tre angoli piani per formare un angolo solido: così deve aversi $2A>3S$, il segno $>$ non escludendo l'eguaglianza. Se si pongano in vece di A ed S i loro valori in H e ω, si avrà $3H+\omega>6+\frac{3}{2}H+\frac{3}{2}\omega$, ovvero $3H>12+\omega$. Rimettendo i valori di H e ω in a, b, c, etc. ne resulterà

$$3a+2b+c>12+e+2f+3g+\text{etc.},$$

ove si vede che a, b, c, non possono essere zero nel medesimo tempo, e che di più non esiste alcun poliedro, cui tutte le facce abbiano più di cinque lati.

Poichè si à $H>4+\frac{1}{3}\omega$, la sostituzione nei valori di

S e di A darà $S>4+\frac{2}{3}\omega$ ed $A>6+\omega$. Ma nel medesimo tempo si à $\omega<3H-12$; e da ciò resulta $S<2H-4$, ed $A<3H-6$, ove ci rammenteremo che i segni $>$ e $<$ non escludono l' eguaglianza. Questi limiti ànno luogo generalmente in tutti i poliedri.

2.° Supponiamo $2A>4S$, il che conviene ad una infinità di poliedri, e particolarmente a quelli cui tutti gli angoli solidi son formati da quattro angoli piani o più; si avrà in questo caso $H>8+\omega$, ovvero, facendo la sostituzione,

$$a>8+c+2d+3e+\text{etc.}$$

Dunque bisogna che il solido abbia al meno otto facce triangolari; il limite $H>8+\omega$ dà $S>6+\omega$, ed $A>12+2\omega$. Ma si à nel medesimo tempo $\omega<H-8$; e da ciò resulta $S>H-2$, $A<2H-4$.

3.° Supponiamo $2A>5$ S, ciò che racchiude tra gli altri poliedri quelli cui tutti gli angoli solidi sono almeno quintupli, e ne resulterà $H>20+3\omega$, ovvero

$$a>20+2b+5c+8d+\text{etc.},$$

e si avrà nel tempo stesso $S>12+2\omega$, ed $A>30+5\omega$; finalmente dall' essere $\omega<\frac{1}{3}(H-20)$, si avranno i limiti

$$S<\frac{2}{3}(H-2),\ A<\frac{5}{3}(H-2).$$

Non si può supporre $2A=6S$, perchè si à in generale $2A+2\omega+12=6S$; dunque non vi è alcun poliedro cui tutti gli angoli solidi sieno formati da sei angoli piani o più. Infatti il minor valore che avrebbe ciascun angolo piano, l' un per l'altro, sarebbe quello dell' angolo di un triangolo equilatero, e sei di questi angoli farebbero quattro angoli retti; il che è troppo grande per un angolo solido.

4.° Consideriamo un poliedro, cui tutte le facce sieno triangolari, si avrà $\omega=0$, il che darà $A=\frac{3}{2}H$ ed $S=2+\frac{1}{2}H$. Supponiamo in oltre che tutti gli angoli solidi

del poliedro sieno in parte quintupli ed in parte sestupli; sia p il numero degli angoli solidi quintupli, q quello dei sestupli; si avrà $S=p+q$, e $2\ A=5p+6q$, il che dà $6S-2\ A=p$; ma abbiamo d' altronde $A=\frac{3}{2}H$, ed $S=2+\frac{1}{2}H$; dunque $p=6S-2A=12$.

Dunque *se un poliedro à tutte le sue facce triangolari ed i suoi angoli solidi sieno in parte quintupli ed in parte sestupli, gli angoli solidi quintupli saranno sempre in numero di 12*. I sestupli potranno essere di numero qualunque: così, lasciando q indeterminato, si avrà in tutti questi solidi

$$S=12+q,\ H=20+2q,\ A=30+3q.$$

Termineremo queste applicazioni con la ricerca del numero delle condizioni o dati necessarî per determinare un poliedro; problema interessante, il quale non sembra che sia stato ancor risoluto.

Supponiamo primieramente che il poliedro sia *di una specie determinata*, vale a dire che si conosca il numero delle sue facce, il numero dei loro lati individualmente e la loro disposizione gli uni riguardo agli altri. Si conoscono dunque i numeri H, S, A, come anche a, b, c, d, etc.: di altro non si tratta fuorchè di avere il numero dei dati effettivi, linee od angoli, per mezzo dei quali il poliedro possa esser costrutto e determinato.

Consideriamo una faccia del poliedro che noi prenderemo per base. Sia n il numero dei suoi lati; bisogneranno $2n-3$ dati per determinare questa base. Gli angoli solidi fuor della base sono in numero di $S-n$; il vertice di ciascun angolo esige tre dati, per la sua determinazione; così la posizione di $S-n$ vertici esigerà $3S-3n$ dati, ai quali aggiungendo i $2n-3$ della base, si avranno in tutto $3S-n-3$. Ma questo numero è in generale troppo grande, e debb' esser diminuito del numero delle condizioni necessarie perchè i vertici che corrispondono ad una medesima faccia sieno in un medesimo piano. Abbiamo chiamato n il numero dei lati della base, e si chiamino parimente n', n'', etc. i numeri dei lati delle altre facce. Tre punti determinano un piano; così ciò

che si troverà di più di 3 in ciascuno dei numeri n', n'', etc., darà altrettante condizioni perchè i differenti vertici sieno situati nei piani delle facce, alle quali essi appartengono, ed il numero totale di queste condizioni sarà eguale alla somma $(n'-3)+(n''-3)+(n'''-3)+$ etc. Ma il numero dei termini di questa *serie* è $H-1$; e d' altronde $n+n'+n''+$etc.$=2A$: dunque la somma della serie sarà $2A-n-3(H-1)$. Togliendo questa somma da $3S-n-3$, resterà $3S-2A+3H-6$; quantità che a causa di $S+H=A+2$, si riduce ad A. Dunque *il numero dei dati necessarî per determinare un poliedro fra tutti quelli della medesima specie è eguale al numero delle sue costole.*

Osservate frattanto che i dati cui si tratta non debbono esser presi a caso fra le linee e gli angoli che costituiscono gli elementi del poliedro; poichè non ostante che si avessero tante equazioni quante incognite, potrebbo succedere che certe relazioni tra le quantità cognite rendessero il problema indeterminato. Così sembrerebbe, secondo il teorema che abbiamo dimostrato, che la conoscenza delle sole costole servisse generalmente per determinare un poliedro; ma vi sono dei casi ove questa conoscenza non è sufficiente. Per esempio, essendo dato un prisma non triangolare qualunque, si potrà formare una infinità di altri prismi che abbiano costole eguali e disposte nella stessa maniera. Poichè allorquando la base à più di tre lati, si può, conservando i lati, cangiare gli angoli, e dare ancora a questa base una infinità di forme diverse; si può cangiare ancora la posizione della costola longitudinale del prisma per rapporto al piano della base; finalmente si possono combinare questi due cangiamenti l' uno con l' altro, e ne resulterà sempre un prisma, le cui costole o lati non avranno cangiato. Da ciò si vede che le sole costole non bastano in questo caso per determinare il solido.

I dati che convien prendere per determinare il solido son quelli che non lasciano alcuna indeterminazione, e non danno assolutamente che una soluzione sola. E in primo luogo la base ABCDE (*fig. 281*) sarà determinata tra tutte le altre maniere se si conosca il lato AB con gli angoli adiacenti BAC, ABC, per il punto C; gli angoli BAD, ABD, per il punto D, e così degli altri. Sia in seguito M un punto cui bisogna determinare la posizione fuori del piano della base; questo punto sarà determinato,

Fig. 281.

se nell'immaginarsi la piramide MABC o solamente il piano MAB si conosceranno gli angoli MAB, ABM, e l'inclinazione del piano MAB sopra la base ABC. Se si determini, per mezzo di tre simili dati, la posizione di ciascun vertice del poliedro fuori del piano della base, è chiaro che il poliedro sarà assolutamente determinato in una maniera unica; di modo che due poliedri costrutti coi medesimi dati saranno necessariamente eguali; sarebbero per altro simmetrici l'uno dell' altro se fossero stati costrutti uno al di sopra ed uno al di sotto del piano della base.

Non è sempre necessario di aver tre dati per determinare ciascun angolo solido di un poliedro; perchè se il punto M dee trovarsi sopra un piano già determinato, cui la intersezione colla base sia FG, servirà dopo aver preso FG a piacimento conoscere gli angoli MGF, MFG, così bisognerà un dato di meno. Se il punto M dee trovarsi sopra due piani già determinati o sulla loro intersezione comune MK che incontra il piano ABC in K, si conoscerà il lato AK, l' angolo AKM e la inclinazione del piano AKM sulla base; basterà dunque di avere per nuovo dato l' angolo MAK. È così che il numero dei dati necessarî per determinare un poliedro assolutamente e di una maniera unica si ridurrà sempre al numero delle sue costole A.

Il lato AB ed un numero A—1 di angoli dati determinano un poliedro; un altro lato a piacimento ed i medesimi angoli determineranno un poliedro simile. D'onde segue che *il numero delle condizioni necessarie perchè due poliedri della medesima specie sieno simili è eguale al numero delle costole meno uno.*

La quistione che abbiam risoluta sarebbe molto più semplice se non si conoscesse la specie del poliedro, ma solamente il numero dei suoi angoli solidi S. Determinate allora tre vertici a piacimento per mezzo di un triangolo, ove saranno tre dati; questo triangolo sarà riguardato come la base del solido: in seguito i vertici fuori di questa base saranno in numero di S—3; e la determinazione di ciascun di essi esigendo tre dati, è chiaro che il numero totale dei dati necessarî per determinare il poliedro sarà 3+3 (S—3), ovvero 3S—6.

Bisogneranno dunque 3S—7 condizioni, perchè due poliedri che ànno un egual numero S di angoli solidi sieno simili tra di loro.

NOTA NONA

Sopra i poliedri regolari. (Vedete l'appendice al libro VII).

È stata nostra idea nella proposizione II di questa appendice dimostrar la esistenza dei cinque poliedri regolari, o vale a dire la possibilità di disporre un certo numero di piani eguali di tal maniera che ne resulti un solido uniforme in tutta la sua estensione. Ci è sembrato che in altre opere queste disposizioni sieno state supposte esistenti senza molto renderne ragione, ovvero non siano dimostrate, che come à fatto *Euclide*, con figure complicate e difficili ad intendersi.

Il problema di determinare la inclinazione di due facce adiacenti di un poliedro e quello di determinare i raggi delle sfere iscritta e circoscritta son ridotti nei problemi III e IV a semplicissime costruzioni; ma non sarà inutile di applicare a questi problemi medesimi il calcolo trigonometrico che darà d' altronde nuove proposizioni.

Sieno a, b, c (*fig. 222*) i tre angoli piani che compongono l' angolo solido O, e sia proposto di trovare la inclinazione dei piani ove sono gli angoli a e b; si descriverà col centro in O il triangolo sferico ABC, nel quale si conosceranno i tre lati $BC=a$, $AC=b$, $AB=c$, e bisognerà trovar l' angolo C contenuto tra i lati a e b. Ora, per le formole cognite, si à Fig. 222.

$$\cos C = \frac{\cos c - \cos a \cos b}{\operatorname{sen} a \operatorname{sen} b}.$$

Questa formola applicata ai cinque poliedri regolari ci farà conoscere la inclinazione di due facce adiacenti in ciascuno di questi solidi.

Nel *tetraedro* i tre angoli piani che compongono l' angolo solido S (*fig. 213*), sono angoli di triangoli equilateri: sia dunque la mezza-circonferenza, ovvero l' arco di Fig. 213.

$200°=\pi$, s'avrà $a=b=c=\frac{1}{3}\pi$; dunque $\cos C = \frac{\cos a - \cos^2 a}{\operatorname{sen}^2 a}$

$= \frac{\cos a(1-\cos a)}{1-\cos^2 a} = \frac{\cos a}{1+\cos a}$. Ma si sa che $\cos\frac{1}{3}\pi = \frac{1}{2}$;

dunque

$$\cos C = \frac{1}{3}.$$

Nell' *esaedro* o cubo i tre angoli piani che formano
Fig. 244. l' angolo solido A (*fig.* 244) , sono angoli retti ; così abbiamo $a=b=c=\frac{1}{2}\pi$, e $\cos a=0$; dunque $\cos C = 0$. Dunque l' angolo di due facce adiacenti è un angolo retto.

Fig. 245. Nell' *ottaedro* (*fig.* 245), se si fa $a=DAS=\frac{1}{3}\pi$, $b=DAT=\frac{1}{3}\pi$, $c=TAS=\frac{1}{2}\pi$, si avrà

$$\cos C = \frac{\cos\frac{1}{2}\pi - \cos^2\frac{1}{3}\pi}{sen^2\frac{1}{3}\pi}$$

Ora , $\cos\frac{1}{2}\pi=0$, $\cos\frac{1}{3}\pi=\frac{1}{2}$, $sen\frac{1}{3}\pi=\frac{1}{2}\sqrt{3}$; dunque $\cos C=-\frac{1}{3}$.

Da ciò si vede che la inclinazione delle facce dell'ottaedro e quella delle facce del tetraedro sono supplemento l' una dell' altra.

Nel *dodecaedro* un angolo solido è formato da tre an-
Fig. 246. goli piani (*fig.* 246) , eguali ciascuno all' angolo di un pentagono regolare ; così, facendo $a=b=c=\frac{3}{5}\pi$, si avrà

$\cos C=\frac{\cos a}{1+\cos a}$; ma $\cos\frac{3}{5}\pi=-sen\frac{1}{10}\pi=\frac{1-\sqrt{5}}{4}$,

dunque $\cos C = \frac{1-\sqrt{5}}{5-\sqrt{5}} = -\frac{1}{\sqrt{5}}$, $\operatorname{sen} C = \frac{1}{\sqrt{5}}$, e $\operatorname{tang} C = -2$.

Nell'*icosaedro* (*fig.* 247) bisogna far $c = C'B'D' = \frac{3}{5}\pi$, $a = b$ Fig. 247. $= C'B'A' = \frac{1}{3}\pi$, e si avrà $\cos C = \frac{\cos\frac{3}{5}\pi - \cos^2\frac{1}{3}\pi}{\operatorname{sen}^2\frac{1}{3}\pi} =$

$\frac{\frac{1}{4}(1-\sqrt{5}) - \frac{1}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{-\sqrt{5}}{3}$; dunque $\operatorname{sen} C = \frac{2}{3}$. Tali sono l' espressioni semplicissime con le quali determinasi la inclinazione di due facce nei cinque poliedri regolari. Ma osserveremo che tutte potevansi comprendere in una sola e medesima formola.

Difatti sia n il numero dei lati di ciascuna faccia, m il numero degli angoli piani che si riuniscono in ciascun angolo solido; se dal centro O (*fig.* 248) e con un raggio$=1$ descrivasi una superficie sferica che incontri in p, q, r le linee OA, OC, OD, si avrà un triangolo sferico $p\,q\,r$, nel quale si conoscono l' angolo retto Fig. 248. r, l'angolo $p = \frac{\pi}{m}$, e l'angolo $q = \frac{\pi}{n}$; si avrà dunque, per le formole cognite, $\cos q\,r = \frac{\cos p}{\operatorname{sen} q}$. Ma $\cos q\,r = \cos$ $COD = \operatorname{sen} CDO = \operatorname{sen}\frac{1}{2}C$, C indicando l' angolo CDE;

dunque $sen\ \frac{1}{2}C = \frac{cos\ \frac{\pi}{m}}{sen\ \frac{\pi}{m}}$.

successivamente ai cinque poliedri darà i medesimi valori di $cos\ C$, o di $1-2\ sen^2 \frac{1}{2}C$ che con altro metodo abbiamo trovati. A tale oggetto bisogna sostituir in ciascun caso i valori di m ed n, cioè:

	Tetraedro,	Esaedro,	Ottaedro,	Dodecaedro,	Isocaedro
$m =$	3	3	4	3	5
$n =$	3	4	3	5	3

Il medesimo triangolo sferico $p\ q\ r$, dal quale abbiamo dedotta la inclinazione di due facce adiacenti dà ancora $cos\ p\ q = cot\ p\ cot\ q$, ovvero $\frac{CO}{OA} = cot\ \frac{\pi}{m}\ cot.\frac{\pi}{n}$. Dunque, se si chiami R il raggio della sfera circoscritta al poliedro, ed r il raggio della sfera nel medesimo iscritta, si avrà $\frac{R}{r} = tang\ \frac{\pi}{m}\ tang\ \frac{\pi}{n}$; d' altronde facendo il lato $AB = a$,

si à $CA = \frac{\frac{1}{2}a}{sen\frac{\pi}{n}}$, e per conseguenza $R^2 = r^2 + \frac{\frac{1}{4}a^2}{sen^2\frac{\pi}{n}}$.

Queste equazioni daranno per ciascun poliedro i valori dei raggi R ed r delle sfere circoscritta ed iscritta. Abbiamo pure, supponendo C cognito, $r = \frac{1}{2}a\ cot\frac{\pi}{n}\ tang\frac{1}{2}C$, ed

$R = \frac{1}{2}a\ tang\frac{\pi}{m}\ tang\frac{1}{2}\ C$.

Nel dodecaedro ed icosaedro si vede chiaro che il rapporto $\frac{R}{r}$ à lo stesso valore $tang\ \frac{\pi}{3}\ tang\frac{\pi}{5}$. Dunque, se

R è lo stesso per ambedue, r sarà pure lo stesso, e vale a dire che se questi due solidi sono iscritti in una medesima sfera, saranno ancora circoscritti alla medesima sfera, e reciprocamente. La medesima proprietà à luogo tra l' esaedro e l' ottaedro, poichè il valore $\frac{R}{r}$ sì per l' uno, come per l' altro è $tang\frac{\pi}{3} tang\frac{\pi}{4}$.

Osserviamo che i poliedri regolari non sono i soli solidi che sieno compresi sotto i poligoni regolari eguali; poichè, se si addossino con una faccia comune due tetraedri regolari eguali, ne resulterà un solido formato da sei triangoli eguali ed equilateri. Si potrebbe formare ancora un altro solido con dieci triangoli eguali ed equilateri. Ma i poliedri regolari sono però i soli, che abbiano nel tempo stesso tutti gli angoli solidi eguali.

NOTA DECIMA

Sull' area del triangolo sferico.

Sia 1 il raggio della sfera, π la semicirconferenza d' un cerchio; sieno a, b, c, i tre lati di un triangolo sferico; A, B, C gli archi di cerchio massimo che misurano gli angoli opposti. Sia $A+B+C-\pi=S$, secondo ciò che è stato dimostrato nel testo (*Prop. 23, lib. VIII*) l'area del triangolo sferico è eguale all'arco S moltiplicato pel raggio, il qual prodotto è parimente rappresentato da S. Ora, per le analogie di *Néper*, si à

$$tang\frac{A+B}{2} : cot\frac{C}{2} :: cos\frac{a-b}{2} : cos\frac{a+b}{2};$$

e ricavando il valore di $tang\ \frac{1}{2}(A+B)$, se ne dedurrà facilmente quello di $tang\left(\frac{1}{2}A+\frac{1}{2}B+\frac{1}{2}C\right)=$

$-cot\frac{1}{2}S$; e si avrà pure $cot\frac{1}{2}S=\frac{cot\frac{1}{2}a\,cot\frac{1}{2}b=cos\,C}{sen\,C}$,

formola semplicissima che può servire a calcolare l'area di un triangolo sferico quando si conoscono due lati a, b, e l' angolo contenuto C. Si possono ancora dedurre più conseguenze.

1.° Se l' angolo C è costante, come pure il prodotto $cot\frac{a}{2}cot\frac{b}{2}$, l'area del triangolo sferico, rappresentata da S, resterà anche essa costante. Dunque due triangoli CAB, Fig.282.CDE, (*fig.* 282) che ànno un angolo eguale C, saranno equivalenti se si avrà $tang\frac{1}{2}CA : tang\frac{1}{2}CD :: tang\frac{1}{2}CE : tang\frac{1}{2}CB$, vale a dire, se le tangenti delle metà dei lati che contengono l'angolo eguale sieno reciprocamente proporzionali.

2.° Per fare sul lato dato CD e col medesimo angolo C un triangolo CDE equivalente al triangolo dato CAB bisogna determinare CE per la proporzione

$$tang\frac{1}{2}CD : tang\frac{1}{2}CA :: tang\frac{1}{2}CB : tang\frac{1}{2}CE.$$

3.° Per costruire con l'angolo del vertice C un triangolo isoscele DCE equivalente al triangolo dato CAB, bisogna prendere $tang\frac{1}{2}CD$ o $tang\frac{1}{2}CE$ media proporzionale tra $tang\frac{1}{2}CA$ e $tang\frac{1}{2}CB$.

4.° La medesima formola $cot\frac{1}{2}S=\frac{cot\frac{1}{2}a\,cot\frac{1}{2}b+cos\,C}{sen\,C}$ può servire a dimostrare in una maniera semplicissima la proposizione XXVI del libro VII, cioè, che di tutti i tri-

angoli sferici formati con due lati dati a e b, il maggiore è quello nel quale l' angolo C contenuto tra i dati sia eguale alla somma degli altri due A e B.

Col raggio $OZ=1$ (*fig. 283*) descrivete la semicirconferenza VMZ ; fate l' arco $ZX=C$, e dall' altra parte del centro prendete $OP=cot\frac{1}{2}a\ cot\frac{1}{2}b$; finalmente tirate PX ed abbassate XY perpendicolare sopra PZ. Fig. 283.

Nel triangolo rettangolo PXY si à $cot\ P=\frac{PY}{XY}=$

$$\frac{cot\frac{1}{2}a\ cot\frac{1}{2}b+cos\ C}{sen\ C}$$

; dunque $P=\frac{1}{2}S$; dunque la superficie S sarà un *maximum* se lo sarà l' angolo P. Orà, è evidente che , se si conduca PM tangente alla circonferenza, l'angolo MPO sarà il *maximum* degli angoli P, ed allora si avrà $MPO=MOZ-\frac{1}{2}\pi$. Dunque il triangolo sferico formato con due lati dati, sarà un *maximum* se si avrà $\frac{1}{2}S=C-\frac{1}{2}\pi$, ovvero $C=A+B$; il che si accorda con la proposizione citata.

Si vede nel medesimo tempo in virtù di questa costruzione che non vi sarebbe luogo al *maximum* se il punto P fosse dentro del cerchio, e vale a dire se si avesse $cot\frac{1}{2}a\ cot\frac{1}{2}b<1$: condizione dalla quale ricavasi in seguito $cot\frac{1}{2}a<tang\frac{1}{2}b$; $tang(\frac{1}{2}\pi-\frac{1}{2}a)<tang\frac{1}{2}b$, $\frac{1}{2}\pi-\frac{1}{2}a<\frac{1}{2}b$, e finalmente $\pi<a+b$; il che si accorda pure con lo scolio della medesima proposizione.

PROBLEMA PRIMO.

Trovare la superficie di un triangolo sferico per mezzo dei suoi tre lati.

Per questo bisognerà nella formola

$$\cot\frac{1}{2}S=\frac{\cot\frac{1}{2}a\cot\frac{1}{2}b+\cos C}{\text{sen } C}$$

sostituire i valori sen C e di cos C espressi con a, b, c; ora si à

$$\cos C=\frac{\cos c-\cos a\cos b}{\text{sen } a \text{ sen } b}, \text{e } \cot\frac{1}{2}a\cot\frac{1}{2}b=\frac{1=\cos a}{\text{sen } a}.\frac{1+\cos b}{\text{sen } b};$$

da ciò resulta

$$\cos C+\cot\frac{1}{2}a\cot\frac{1}{2}b=\frac{1+\cos a+\cos b+\cos c}{\text{sen } a \text{ sen } b}.$$

In seguito il valore di $\cos C$ dà

$$1+\cos C=\frac{\cos c-\cos(a+b)}{\text{sen } a \text{ sen } b}=\frac{2\text{ sen}\frac{a+b+c}{2}\text{sen}\frac{a+b-c}{2}}{\text{sen } a \text{ sen } b},$$

$$1-\cos C=\frac{\cos(a-b)-\cos c}{\text{sen } a \text{ sen } b}=\frac{2\text{ sen}\frac{a+c-b}{2}\text{ sen}\frac{b+c-a}{2}}{\text{sen } a \text{ sen } b}$$

Moltiplicando tra loro queste due quantità ed estraendo la radice quadrata del loro prodotto, si avrà

$$\text{sen}C=\frac{2\sqrt{\left(\text{sen}\frac{a+b+c}{2}\text{sen}\frac{a+b-c}{2}\text{sen}\frac{a+c-b}{2}\text{sen}\frac{b+c-a}{2}\right)}}{\text{sen } a \text{ sen } b}.$$

Dunque in fine

$$\cot\frac{1}{2}S=\frac{1+\cos a+\cos b+\cos c}{2\sqrt{\left(\operatorname{sen}\frac{a+b+c}{2}\operatorname{sen}\frac{a+b-c}{2}\operatorname{sen}\frac{a+c-b}{2}\operatorname{sen}\frac{b+a-c}{2}\right)}}$$

Questa formola risolve il problema proposto; ma si può arrivare eziandio ad un resultato più semplice.

Perciò ritorniamo alla formola

$$\cot\frac{1}{2}S=\frac{\cot\frac{1}{2}a\cot\frac{1}{2}b+\cos C}{\operatorname{sen} C},$$

e ricaveremo subito $1+\cot^2\frac{1}{2}S$, ovvero

$$\frac{1}{\operatorname{sen}^2\frac{1}{2}S}=\frac{\cot^2\frac{1}{2}a\cot^2\frac{1}{2}b+2\cot\frac{1}{2}a\cot\frac{1}{2}b\cos C+1}{\operatorname{sen}^2 C}.$$

Ora il valore di $\cos C$ dà

$$2\cot\frac{1}{2}a\cot\frac{1}{2}b\cos C=\frac{\cos c-\cos a\cos b}{2\operatorname{sen}^2\frac{1}{2}a\operatorname{sen}^2\frac{1}{2}b}$$

nel numeratore in luogo di $\cos c$, $\cos a$, $\cos b$, i loro valori $1-2\operatorname{sen}^2\frac{1}{2}c$, $1-2\operatorname{sen}^2\frac{1}{2}a$, $1-2\operatorname{sen}^2\frac{1}{2}b$, e riducendo si avrà

$$2\cot\frac{1}{2}a\cot\frac{1}{2}b\cos C=\frac{\operatorname{sen}^2\frac{1}{2}a+\operatorname{sen}^2\frac{1}{2}b-\operatorname{sen}^2\frac{1}{2}c}{\operatorname{sen}^2\frac{1}{2}a\operatorname{sen}^2\frac{1}{2}b}-2.$$

Si à d' altronde

$$\cot^2\frac{1}{2}a\cot^2\frac{1}{2}b=\frac{1-sen^2\frac{1}{2}a}{sen^2\frac{1}{2}a}\cdot\frac{1-sen^2\frac{1}{2}b}{sen^2\frac{1}{2}b}=$$

$$\frac{1-sen^2\frac{1}{2}a-sen^2\frac{1}{2}b}{sen^2\frac{1}{2}a\,sen^2\frac{1}{2}b}+1.$$ Dunque, sostituendo questi valori, si avrà $\frac{1}{sen^2\frac{1}{2}S}=\frac{1-sen^2\frac{1}{2}c}{sen^2\frac{1}{2}a\,sen^2\frac{1}{2}b\,sen^2C}$, il

che dà $sen\,\frac{1}{2}S=\frac{sen\frac{1}{2}a\,sen\,\frac{1}{2}b\,sen\,C}{\cos\frac{1}{2}c}$, e, rimettendo

il valore di $sen\ C$, si à

$$sen\frac{1}{2}S\frac{\sqrt{\left(sen\frac{a+b+c}{2}sen\frac{a+b-c}{2}sen\frac{a+c-b}{2}sen\frac{b+c-a}{2}\right)}}{2\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c}.$$

Formola comoda pel calcolo logaritmico.

Se si moltiplichi questa pel valore di $\cot\frac{1}{2}S$, resulterà

$$\cos\frac{1}{2}S=\frac{1+\cos a+\cos b+\cos c}{4\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c}=\frac{\cos^2\frac{1}{2}a+\cos^2\frac{1}{2}b+\cos^2\frac{1}{2}c-1}{2\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c}.$$

Nuova formola che à il vantaggio di essere tutta composta di termini razionali.

Da questa ricavasi ancora $\dfrac{1-\cos\frac{1}{2}S}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}S}$, ovvero

$$\operatorname{tang}\frac{1}{4}S=\frac{1-\cos^2\frac{1}{2}a-\cos^2\frac{1}{2}b-\cos^2\frac{1}{2}c+2\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c}{\sqrt{\left(\operatorname{sen}\frac{a+b+c}{2}\operatorname{sen}\frac{a+b-c}{2}\operatorname{sen}\frac{a+c-b}{2}\operatorname{sen}\frac{b+c-a}{2}\right)}}.$$

Ora il numeratore di questa espressione può decomporsi in fattori, come si è fatto per una simile quantità, nota V, problema IV ; si avrà così

$$\operatorname{tang}\frac{1}{4}S=\frac{4\operatorname{sen}\frac{a+b+c}{4}\operatorname{sen}\frac{a+b-c}{4}\operatorname{sen}\frac{a+c-b}{4}\operatorname{sen}\frac{b+c-a}{4}}{\sqrt{\left(\operatorname{sen}\frac{a+b+c}{2}\operatorname{sen}\frac{a+b-c}{2}\operatorname{sen}\frac{a+c-b}{2}\operatorname{sen}\frac{b+c-a}{2}\right)}}$$

Ma si à $\dfrac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}p}{\sqrt{\operatorname{sen}p}}=\sqrt{\left(\dfrac{\operatorname{sen}^2\frac{1}{2}p}{2\operatorname{sen}\frac{1}{2}p\cos\frac{1}{2}p}\right)}=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\operatorname{tang}\frac{1}{2}p\right)}$;

dunque finalmente

$$\operatorname{tang}\frac{1}{4}=S\sqrt{\left(\operatorname{tang}\frac{a+b+c}{4}\operatorname{tang}\frac{a+b-c}{4}\operatorname{tang}\frac{a+c-b}{4}\operatorname{tang}\frac{b+c-a}{4}\right)}.$$

Questa elegantiss^ima formola è dovuta a *Simone Lhuillier.*

PROBLEMA SECONDO.

Fig. 284. *Essendo dati i tre lati* BC$=a$, AC$=b$, AB$=c$ (fig. 284) *determinare la posizione del punto* I, *polo del cerchio circoscritto al triangolo* ABC.

Sia l'angolo ACI$=x$, e l'arco AI$=$CI$=$BI$=\varphi$; nei triangoli CAI, CBI, si avrà, per le formole cognite,

$$\cos x = \frac{\cos\varphi - \cos b\cos\varphi}{\operatorname{sen} b\operatorname{sen}\varphi} = \frac{1-\cos b}{\operatorname{sen} b}\cot\varphi = \frac{\operatorname{sen} b}{1+\cos b}\cot\varphi,$$

$$\cos(C-x) = \frac{1-\cos a}{\operatorname{sen} a}\cot\varphi.$$ Dunque $\frac{\cos(C-x)}{\cos x}$, ovvero

$$\cos C + \operatorname{sen} C \operatorname{tang} x = \frac{(1+\cos b)(1-\cos a)}{\operatorname{sen} a\operatorname{sen} b};$$ sostituendo

in questa equazione i valori di $\cos$ C e sen C espressi con a, b, c, e facendo, per brevità,

$$M=\sqrt{(1-\cos^2 a-\cos^2 b-\cos^2 c+2\cos a\cos b\cos c)},$$

se ne dedurrà $\operatorname{tang} x = \frac{1+\cos b-\cos c-\cos a}{M}$; formola

che determina l'angolo ACI. Si può osservare che per i

triangoli isosceli ACI, ABI, BCI si à ACI$=\frac{1}{2}$(C$+$A$-$B)

avrebbesi parimente BCI$=\frac{1}{2}$(B$+$C$-$A), BAI$=\frac{1}{2}$(A$+$B$-$C). Da ciò resultano queste formole

$$\operatorname{tang}\frac{1}{2}(A+C-B) = \frac{1+\cos b-\cos a-\cos c}{M},$$

$$\operatorname{tang}\frac{1}{2}(B+C-A) = \frac{1+\cos a-\cos b-\cos c}{M},$$

$$tang\frac{1}{2}(A+B-C)=\frac{1+\cos c-\cos a-\cos b}{M},$$

alle quali si può aggiungere quella che dà $cot\,\frac{1}{2}S$, e che può mettersi sotto la forma

$$tang\frac{1}{2}(A+B+C)=\frac{-1-\cos a-\cos b-\cos c}{M}.$$

Il valore di tangente x che abbiamo trovato dà $1+tang^2 x$, ovvero $\frac{1}{\cos^2 x}=\frac{2(1+\cos b)(1-\cos c)(1-\cos a)}{M^2}=$

$$\frac{16\cos^2\frac{1}{2}b\,sen^2\frac{1}{2}c\,sen^2\frac{1}{2}a}{M^2};$$

dunque $\frac{1}{\cos x}=\frac{4\cos\frac{1}{2}b\,sen\frac{1}{2}c\,sen\frac{1}{2}a}{M}$. Ma dalla equazione $\cos x=\frac{1-\cos b}{sen\,b}\cot\varphi=tang\frac{1}{2}b\cot\varphi$, si ricava

$tang\,\varphi=\frac{tang\,\frac{1}{2}b}{\cos x}$; dunque $tang\,\varphi=\frac{4\,sen\frac{1}{2}a\,sen\frac{1}{2}b\,sen\frac{1}{2}c}{M}=$

$$\frac{2\,sen\frac{1}{2}a\,sen\frac{1}{2}b\,sen\frac{1}{2}c}{\sqrt{\left(sen\frac{a+b+c}{2}sen\frac{a+b-c}{2}sen\frac{a+c-b}{2}sen\frac{a+c-a}{2}\right)}}.$$

PROBLEMA TERZO.

Determinare sulla superficie della sfera la linea nella quale sono situati tutti i vertici dei triangoli della medesima base e della medesima superficie.

Fig. 285. Sia ABC (*fig.* 285) uno dei triangoli sferici la cui base comune è $AB=c$, e la superficie data $A+B+C-\pi=S$. Sia IPK una perpendicolare indefinita alzata sulla metà di AB; avendo preso IP eguale al quadrante, P sarà il polo dell' arco AB, e l' arco PCD condotto pei punti P, C sarà perpendicolare sopra AB. Sia $ID=p$, $CD=q$; i triangoli rettangoli ACD, BCD, nei quali si à

$AC=b$, $BC=a$, $AD=p+\frac{1}{2}c$, $BD=p-\frac{1}{2}c$, daranno

$$\cos a=\cos q\cos\left(p-\frac{1}{2}c\right),\ \cos b=\cos q\cos\left(p+\frac{1}{2}c\right).$$

Ma si è trovato precedentemente

$$\cot\frac{1}{2}S=\frac{1+\cos a+\cos b+\cos c}{\operatorname{sen} a\operatorname{sen} b\operatorname{sen} C};$$

sostituendo in questa formola i valori $\cos a+\cos b=2\cos q\cos p\cos\frac{1}{2}c$, $1-\cos c=2\cos\frac{1}{2}c$, $\operatorname{sen} b\operatorname{sen} C=\operatorname{sen} c\operatorname{sen} B=2\operatorname{sen}\frac{1}{2}c\cos\frac{1}{2}c\operatorname{sen} B$; si avrà

$$\cot\frac{1}{2}S=\frac{\cos\frac{1}{2}c+\cos p\cos q}{\operatorname{sen} a\operatorname{sen}\frac{1}{2}c\operatorname{sen} B}.$$

D' altronde nel triangolo rettangolo BCD si à ancora $\operatorname{sen} a\operatorname{sen} B=\operatorname{sen} q$; dunque

$$\cot\frac{1}{2}S=\frac{\cos\frac{1}{2}c+\cos p\cos q}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}c\operatorname{sen} q},$$

ovvero $\cos p\cos q=\cot\frac{1}{2}S\operatorname{sen}\frac{1}{2}c\operatorname{sen} q-\cos\frac{1}{2}c$. Questa è la relazione tra p e q che deve determinare la linea sulla quale sono situati tutti i punti C.

Avendo prolungato IP di una lunghezza $PK=x$, congiungete KC, e sia $KC=y$; nel triangolo PKC, ove si à $PC=\frac{1}{2}\pi-q$, e l' angolo $KPC=\pi-p$, il lato KC si troverà mediante la formola $\cos KC=\cos KPC\operatorname{sen} PK\operatorname{sen} PC+\cos PK\cos PC$, ovvero

$$\cos y=\operatorname{sen} q\cos x-\operatorname{sen} x\cos q\cos p;$$

nella quale sostituendo in vece di $\cos q\cos p$ il suo valore $\cot\frac{1}{2}S\operatorname{sen}\frac{1}{2}c\operatorname{sen} q-\cos\frac{1}{2}c$, si avrà

$$\cos y=\operatorname{sen} x\cos\frac{1}{2}c+\operatorname{sen} q\left(\cos x-\operatorname{sen} x\cot\frac{1}{2}S\operatorname{sen}\frac{1}{2}c\right).$$

Da ciò si vede che, se si prenda $\cos x-\operatorname{sen} x\cot\frac{1}{2}S\operatorname{sen}\frac{1}{2}c=0$, ovvero $\cot x=\cot\frac{1}{2}S\operatorname{sen}\frac{1}{2}c$, avrassi $\cos y=\operatorname{sen} x\cos\frac{1}{2}c$, e così il valore di y diventerà costante.

Dunque se dopo di aver condotto IP perpendicolare sulla metà della base AB si prenda al di là del polo la parte PK tale che $\cot PK=\cot\frac{1}{2}S\operatorname{sen}\frac{1}{2}c$, tutti i vertici dei triangoli che ànno la medesima base c e la me-

desima superficie S, saranno situati sul cerchio minore descritto dal punto K, come polo, ad una distanza KC tale,

che $\cos KC = \operatorname{sen} PK \cos \frac{1}{2} c$.

Questo teorema è dovuto a *Lexell*. (Vedete il tomo V, parte I dei *Nova Acta Petropolitana*).

NOTA UNDECIMA

Sulla proposizione III, *libro VIII*.

Questa proposizione può esser dimostrata più rigorosamente riportandola ai lemmi preliminari nella maniera seguente.

Dico primieramente, che la superficie convessa terminata dalle costole (*fig.* 252) AF, BG e dagli archi A *u* B, F *x* G non può essere minor del rettangolo ABGF, che è porzione corrispondente della superficie del prisma iscritto.

Fig. 251

Infatti, sia S la superficie convessa cui si tratta, e sia, se è possibile, il rettangolo ABGF ovvero $AB \times AF = S + M$, M essendo una quantità positiva.

Prolungate l'altezza AF del prisma e del cilindro fino ad una distanza AF′ eguale ad *n* volte AF, *n* essendo un numero intero qualunque. Se si prolunghino nel medesimo tempo il cilindro ed il prisma, è chiaro che la superficie convessa S′, compresa tra le costole AF′, BG′, conterrà *n* volte la superficie S; di maniera che si avrà $S' = nS$; e perchè $n \times AF = AF'$ si avrà $AB \times AF' = nS + nM = S' + nM$. Ora *n* essendo un numero intero qualunque ed M una superficie data, si può prendere *n* in modo, che si abbia *n* M maggiore del doppio del segmento A *u* B, poichè basta per

questo far $n > \frac{2A\,u\,B}{M}$; dunque allora il rettangolo

$AB \times AF'$ ovvero la superficie piana ABG′F′ sarebbe maggiore della superficie circondante, composta dalla superficie convessa S′ e dai due segmenti circolari eguali A *u* B, F′ *x*′ G′. Ora, al contrario, la seconda superficie è maggior della prima, in virtù del primo lemma preliminare; dunque 1.° non si può avere $S < ABGF$.

Dico in secondo luogo, che la medesima superficie con-

vessa S non può esser eguale a quella del rettangolo ABGF. Poichè supponiamo, se è possibile, che prendendo AE=AB, la superficie convessa AMK sia eguale al rettangolo AFKE; per un punto qualunque M dell' arco AME conducete le corde AM, ME, ed alzate MN perpendicolare sul piano della base. I tre rettangoli AMNF, MEKN, AEKF, avendo la medesima altezza, stanno tra loro come le respettive basi AM, ME, AE. Ora si à AM+ME>AE; dunque la somma dei rettangoli AMNF, MEKN è maggiore del rettangolo AFKE. Questo ultimo è, per ipotesi, equivalente alla superficie convessa AMK, composta dalle due superficie parziali AN, MK. Dunque la somma dei rettangoli AMNF, MEKN è maggiore della somma delle superficie convesse corrispondenti AN, MK. Dunque bisognerà, che uno almeno dei rettangoli AMNF, MEKN sia maggiore della superficie convessa corrispondente. Questa conseguenza è contraria alla prima parte già dimostrata. Dunque 2.° la superficie convessa S non può esser eguale a quella del rettangolo corrispondente ABGF.

Segue da ciò che si à S>ABGF, e che ancora la superficie convessa del cilindro è maggiore di quella di qualunque prisma nel medesimo iscritto.

Con un ragionamento assolutamente simile si proverebbe, che la superficie convessa del cilindro è minore di quella di qualunque prisma circoscritto.

NOTA DUODECIMA

Sopra la eguaglianza e la similitudine dei poliedri.

Si trovano nel principio dell' XI° libro di Euclide le definizioni 9 e 10 così concepite.

9. *Due solidi sono simili allorchè son compresi da un medesimo numero di piani respettivamente simili.*

10. *Due solidi sono eguali e simili allorchè son compresi da un medesimo numero di piani respettivamente eguali e simili.*

L' oggetto di queste definizioni essendo uno dei punti i più difficili degli elementi di geometria, noi gli esamineremo con qualche dettaglio, e discuteremo nel medesimo tempo le osservazioni fatte a questo oggetto da *Roberto Simson* nella sua edizione degli elementi a pag. 388 e seguenti.

In primo luogo osserveremo col precitato *Roberto Simson* che la definizione 10 non è propriamente una definizione, ma un teorema che bisognerebbe dimostrare, poichè non è evidente, che due solidi sieno eguali per la sola ragione che ànno tutte le facce respettivamente eguali; e, se questa proposizione è vera, convien dimostrarla o con la soprapposizione o in qualunque altra maniera. Si vede in seguito che il vizio della definizione 10 è comune alla definizione 9. Poichè, se la definizione 10 non è dimostrata, si potrà credere che esistano due solidi ineguali e dissimili, le cui facce sono eguali; ma allora, secondo la definizione 9, un terzo solido che avesse le facce simili a quelle de' due primi sarebbe simile a due corpi di differente forma; conclusione che implica contraddizione od almeno che non si accorda con l' idea che si attacca naturalmente alla parola *simile.*

Più proposizioni dell' XI.° e XII.° libro di Euclide son fondate sulle definizioni 9 e 10, e tra le altre la proposizione XXVIII del libro XI dalla quale dipende la misura dei prismi e delle piramidi. Sembra dunque che si possano rimproverare agli elementi di Euclide di contenere un gran numero di proposizioni che non sono rigorosamente dimostrate. Ma vi è una circostanza bastevole ad indebolire questo rimprovero, e che non devesi omettere.

Le figure, mercè le quali Euclide dimostra la eguaglianza o la similitudine dei solidi fondandosi sulle definizioni 9 e 10, sono tali che i loro angoli solidi non sono formati da più di tre angoli piani. Ora, se due angoli solidi sono composti ciascuno di tre angoli piani respettivamente eguali, è dimostrato assai chiaramente in più luoghi da Euclide che questi angoli solidi sono eguali. D'altronde, se due poliedri ànno le facce respettivamente eguali o simili, gli angoli solidi omologhi saranno composti da un medesimo numero di angoli piani respettivamente eguali. Dunque, fintantocchè gli angoli piani non sono in maggior numero di tre in ciascun angolo solido, è chiaro che gli angoli solidi omologhi sono eguali. Ma, se le facce omologhe sono eguali, e gli angoli solidi omologhi eguali, non vi è più dubbio che i solidi non sieno eguali; poichè essi potranno essere soprapposti, od almeno saranno simmetrici l'uno rispetto all'altro. Si vede dunque che l'enunciato delle definizioni 9 e 10 è vero ed ammissibile almeno nel caso degli angoli solidi tripli che è il

solo del quale Euclide abbia fatto uso. Così il rimprovero d' inesattezza che si potrebbe fare a questo autore o ai suoi commentatori cessa di essere cotanto grave, e non cade più che sopra le restrizioni e spiegazioni che egli non à date.

Resta ad esaminarsi se l' enunciato della definizione 10 che è vero nel caso degli angoli solidi tripli sia vero altresì in generale. Roberto Simson assicura che ciò non è, e che si possono costruire due solidi disuguali, i quali saranno terminati da un medesimo numero di facce respettivamente eguali. Egli cita, per appoggio della sua assertiva, un esempio che si può generalizzare così.

Se ad un poliedro qualunque si aggiunga una piramide, dandole per base una delle facce del poliedro; se in seguito in vece di aggiungervi la piramide, essa si tolga, formando nel poliedro una cavità eguale alla piramide, avrete così due nuovi solidi che avranno facce respettivamente eguali, e frattanto questi due solidi saranno ineguali.

Non vi è alcun dubbio sulla ineguaglianza dei due solidi così costrutti; ma noi osserveremo che uno di questi solidi contiene angoli solidi rientranti: ora è più che probabile che Euclide abbia inteso escludere i corpi irregolari che ànno cavità od angoli solidi rientranti, e che si è limitato ai poliedri convessi. Ammettendo questa restrizione, senza la quale, per il contrario, altre proposizioni non sarebbero vere, l'esempio di Roberto Simson non conclude nulla contra la definizione o teorema di Euclide.

In qualunque modo la cosa sia, resulta da queste osservazioni che le definizioni 9 e 10 di Euclide non possono essere conservate tali come esse sono. Roberto Simson sopprime la definizione dei solidi eguali che infatti non debb' esser posta se non che fra i teoremi, ed egli definisce per *solidi simili* quelli che son circondati da un medesimo numero di piani simili, e che ànno gli angoli solidi respettivamente eguali. Questa definizione è vera, ma essa à l'inconveniente di contener condizioni superflue. Se si sopprime la condizione degli angoli solidi eguali, si ricaderebbe nell' enunciato di Euclide che è difettoso, perchè suppone la dimostrazione del teorema risguardante i poliedri eguali. A scanso di ogni imbarazzo abbiamo creduto a proposito di dividere in due parti la definizione de' solidi simili: primieramente abbiam definite le piramidi

triangolari simili; dipoi abbiam definiti per *solidi simili* quelli che ànno le basi simili, ed i cui vertici omologhi fuori di queste basi son determinati da piramidi triangolari respettivamente simili.

Questa definizione esige, quanto alle basi, supponendole triangolari, due condizioni, e per ciascuno dei vertici fuor delle basi tre condizioni; di maniera che, se S è il numero degli angoli solidi di ciascuno dei poliedri, la similitudine di questi poliedri esigerà 2+3 (S—3) angoli eguali da una parte e dall' altra, ovvero 3S—7 condizioni; nè alcuna di queste condizioni è superflua o compresa nell' altra. Poichè consideriamo qui due poliedri come aventi semplicemente il medesimo numero di vertici o di angoli solidi; allora bisognano rigorosamente e senza omettere alcuna le 3S—7 condizioni perchè i due solidi sieno simili; ma se prima di tutto si supponga che sono l'uno e l'altro della *medesima specie*, e vale a dire che essi ànno un egual numero di facce, e che queste facce paragonate insieme ànno respettivamente un egual numero di lati, questa supposizione conterrebbe alcune delle dette condizioni nel caso che vi fossero facce di più di tre lati, e queste condizioni diminuiranno di altrettanto il numero 3S—7, di modo che in luogo di 3S—7 condizioni, non ne bisogneranno che A—1: sopra di che vedete la nota VIII. Si fa manifesto da ciò cosa sia che dà luogo alla difficoltà di porre una buona definizione dei solidi simili; questa è che si possono considerare come essendo della medesima specie o solamente come avendo un egual numero di angoli solidi. In quest' ultimo caso ogni difficoltà è allontanata, e bisogna che le 3S—7 condizioni contenute nella definizione sieno soddisfatte tutte perchè i solidi sieno simili, e se ne concluderà con più ragione che essi sono della medesima specie. Del resto la nostra definizione essendo completa, ne abbiamo dedotta come teorema la definizione già data da *Roberto Simson*.

Si vede dunque che si può ben tralasciare di porre negli Elementi il teorema concernente l' eguaglianza dei poliedri; ma siccome questo teorema è interessantissimo per sè stesso, si stima conveniente di qui rapportarne la dimostrazione che servirà a completare la teorica dei poliedri (1).

(1) *La dimostrazione che diamo qui è, salvo alcuni*

La quistione che bisogna esaminare è di sapere se, facendo variare le inclinazioni dei piani che compongono la superficie di un poliedro convesso dato, si possa formare un secondo poliedro convesso, compreso sotto i medesimi piani poligonali disposti tra loro nel medesimo ordine.

Osserveremo in prima che, se vi è un secondo poliedro che soddisfa alla quistione, questo non può essere il poliedro simmetrico del poliedro dato, perchè in questi due poliedri i piani eguali son disposti in un ordine inverso intorno agli angoli solidi corrispondenti. Quindi la considerazione dei poliedri simmetrici dev' essere intieramente esclusa dall' oggetto cui ci occupiamo.

Osserveremo in secondo luogo, che se il poliedro dato contiene uno o molti angoli solidi tripli, questi angoli sono di lor natura invariabili, poichè la conoscenza di tre angoli piani basta per determinare le scambievoli inclinazioni di questi piani, quando essi sono riuniti in angoli solidi. Si possono dunque sopprimere nei solidi proposti tutte le piramidi triangolari che formano gli angoli solidi tripli (1); e se il nuovo poliedro che resulta da questa soppressione offra ancora degli angoli tripli, si potranno del pari sopprimerli, e così successivamente, fino a che si pervenga ad un poliedro, i cui angoli solidi non comprendano meno di quattro angoli piani per ciascuno. In fatti, se il solido proposto può cambiare di figura per qualunque variazione nelle inclinazioni dei suoi piani, questo cambiamento non può aver luogo sopra le piramidi sottratte, ed esso dovrà operarsi intieramente sul poliedro rimasto dopo la soppressione di tutte le piramidi triangolari. Non ci occuperemo dunque in ciò che segue, che dei poliedri cui ciascuno angolo solido comprenda almeno quattro angoli piani.

Ciò posto, sia S (*Fig. 286*) un angolo solido Fig. 286.

sviluppi, quella che M. Cauchy à presentata all' Istituto nel 1812, e che egli à scoverta partendo da alcune idee che erano state proposte sul medesimo oggetto nella prima edizione di questi elementi, pag. 327, e seguenti.

(1) *Se uno stesso spigolo fosse comune a due angoli solidi tripli, non si sopprimerebbe nella prima operazione che uno di questi angoli.*

qualunque del poliedro, e sia descritta, col vertice S come centro, una superficie sferica, le intersezioni della quale co' piani dell' angolo solido formeranno un poligono sferico ABCDEF. I lati di questo poligono AB, BC, etc., servono di misura agli angoli piani ASB, BSC, etc. e sono per conseguenza invariabili. In quanto agli angoli A, B, C, etc., del poligono, ciascuno di essi è la misura dell' inclinazione dei due piani adiacenti dell' angolo solido: così l' angolo B è la misura dell' inclinazione dei piani ASB, SBC, che chiameremo, per abbreviare *inclinazione sullo spigolo* SB; similmente l' angolo C è la misura dell' inclinazione sullo spigolo SC, e così di seguito.

Potremo dunque giudicare questi cambiamenti della figura di ciascun angolo solido S, da quelli del poligono sferico ABCDEF, i cui lati sono costanti, purchè però il poligono non cessi di essere convesso. Ora, in questi poligoni, il segno delle variazioni sopra gli angoli offrono leggi molto rimarchevoli che noi esporremo nei due lemmi seguenti.

LEMMA PRIMO

Fig. 286. *Essendo dati tutti i lati di un poligono sferico* AB, BC, CD, DE (Fig. 286), *ad eccezione dell' ultimo* AF, *se si fa variare uno degli angoli* B, C, D, E, *opposti al lato* AF, *gli altri essendo costanti; dico che il lato* AF *aumenterà se l' angolo aumenta, e che esso diminuirà se l'angolo diminuisce. Supponendo sempre che il poligono sia convesso prima e dopo il suo cambiamento di figura.*

Supposto da principio che si faccia variare l'angolo B, i tre altri C, D, E essendo costanti, se si congiunga BF, la figura BCDEF non subirà alcuna variazione, e BF sarà costante. Si avrà dunque un triangolo sferico ABF, i cui lati AB, BF sono costanti, e nel quale l' angolo ABF varia di una stessa quantità dell' angolo ABC del poligono, poichè la parte FBC resta costante. Ora, per le proprietà cognite (1), si sa che il lato AF aumenterà se l' angolo ABF aumenta, e che diminuirà se l' angolo ABF diminuisce.

(1) *Questa proposizione si dimostra della stessa maniera che la proposizione X, lib. I, per i triangoli rettilinei.*

Suppongasi ora che l' angolo C varia, i tre altri B, D, E essendo costanti; se si tirino la diagonali AC, FC è evidente che queste diagonali resteranno costanti al pari degli angoli ACB, FCD; si avrà dunque ancora un triangolo sferico, ACF i cui lati AC, CF sono costanti, e nel quale l'angolo ACF varia della stessa quantità dell' angolo C del poligono; dal che si concluderà similmente che il lato AF aumenterà se l'angolo C aumenta, e che diminuirà se l' angolo C diminuisce.

Egli è chiaro che lo stesso ragionamento può applicarsi alla variazione dell'uno o dell' altro degli angoli D ed E, e che esso avrebbe luogo per ogni altro poligono sferico di più di tre lati. Quindi la conclusione sarà, in ogni caso, conforme allo enunciato della proposizione, se ogni volta il poligono è convesso prima e dopo il suo cambiamento di figura. Questa restrizione è necessaria, poichè se l' angolo E, per esempio, diminuisse sino a che il punto F cadesse sulla diagonale AE, allora AF sarebbe un *minimum*; e se, a contare da questo punto, si continuasse a diminuire l' angolo E, è visibile, che il lato AF aumenterà in luogo di diminuire: ma, in questo ultimo caso, l'angolo AFE diverrebbe un angolo rientrato, ed il poligono cesserebbe di essere convesso.

Corollario. Supponendo le medesime cose, se più angoli opposti all' ultimo lato AF aumentano, e che nessun di essi diminuisce, il lato AF aumenterà necessariamente per l' effetto di tutte le variazioni riunite. Il contrario avrà luogo, se più angoli opposti al lato AE diminuiscano, e che nessuno di essi aumenti.

Poichè, se per l' effetto dell' aumentazione o della diminuzione simultanea, gli angoli A, B, C etc. del poligono debbono essere cambiati in A', B', C', etc., si potrà passare successivamente dal poligono proposto a quello che non contiene che un angolo variato A'; da questo al poligono che non contiene che i due angoli variati A' e B', e così di seguito. Ora in ciascuno di questi passaggi, l' applicazione della proposizione è manifesta e conduce sempre al medesimo resultato.

LEMMA SECONDO

Essendo dato un poligono sferico convesso, i cui lati sono costanti, e che ne abbia più di tre, se si fanno variare gli angoli in una maniera qualunque, senza però che il poligono cessi di essere convesso; se si mette in seguito il segno + al vertice di ogni angolo che aumenta, il segno — al vertice di ogni angolo che diminuisce, e che non si metta segno alcuno agli angoli che restano costanti; dico che facendo il giro del poligono, si dovranno trovare al meno quattro cambiamenti di segni da un vertice al vertice seguente.

In fatti 1.° se n è il numero degli angoli del poligono, esso non potrà avere che $n - 2$ angoli consecutivi, che aumentano tutti nel tempo stesso, ovvero dei quali alcuni aumentano, e gli altri restano costanti; poichè se l' uno o l'altro di questi casi avesse luogo, ne seguirebbe, per lo corollario del lemma precedente, che il lato del poligono che è opposto a questi $n - 2$ angoli aumenterebbe, ciò che è contro all' ipotesi, che tutti i lati del poligono sono costanti. Per una simile ragione non si potrà supporre che $n-2$ angoli consecutivi diminuiscano tutti nel tempo stesso, o che alcuni diminuiscano lasciando gli altri costanti. Dunque nella serie degli $n - 2$ angoli consecutivi, dovrà esservi almeno un cambiamento di segno, e con più ragione questo cambiamento dovrà essere osservato nella serie degli n angoli consecutivi, allorquando si farà l'intiero giro del poligono.

2.° Le variazioni degli angoli del poligono non possono essere tali, che esse offrano solamente una serie di segni +, ed una di segno —, di modo che non vi sono che due cambiamenti di segno nel giro intero del poligono.

Fig. 287. Poichè siano, per esempio, A, B, C (*Fig. 287*) i tre angoli segnati col segno +, D, E, F, G, i quattro segnati dal segno — (questa ipotesi comprende quella cui sarebbe un numero di segni minore in ciascuna serie, a motivo della invariabilità di qualche angolo). Se la figura rappresenta lo stato iniziale del poligono, la diagonale GD dovrà aumentare allor quando si aumenteranno tutti gli angoli A, B, C, o solamente alcun di essi; ma

la stessa diagonale GD , come appartenente al poligono GFED , gli altri lati del quale sono costanti , dovrà diminuire nel tempo stesso che gli angoli F ed E , o al meno restare costante , se de' quattro angoli D , E, F, G, non vi sono che D e G, e solamente uno di essi che diminuisca ; dunque l'ipotesi cui si tratta non potrebbe aver luogo ; dunque la variazione degli angoli non può essere tale da offrire solamente due serie , una di segni + e l'altra di segni —.

3.° Egli è egualmente impossibile che facendo il giro del poligono, non si trovino che tre serie alternative di segni + e di segni —, poichè, in questa ipotesi, la prima e la terza serie sarebbero del medesimo segno, e si seguirebbero immediatamente, di modo che esse non formerebbero che una sola serie ; dal che si vede che non vi sarebbero realmente nel giro del poligono che due serie , l'una di segni +, e l'altra di segni — ; qual cosa noi abbiamo dimostrata impossibile.

Dunque finalmente i cambiamenti di segni che si troveranno facendo il giro del poligono debbono essere almeno al numero di quattro.

Corollario. Ciò che abbiamo dimostrato per i poligoni sferici si applica immediatamente agli angoli solidi dei quali questi poligoni sono la misura. Quindi, *essendo dato un angolo solido convesso, formato da più di tre angoli piani , se si fanno variare le inclinazioni sopra gli spigoli di una maniera qualunque , tale però che l'angolo solido non cessi di essere convesso ; se in seguito si mette il segno + o il segno — sopra ciascuno spigolo, secondo che l'inclinazione sopra questo spigolo aumenti o diminuisca, e che non si marcano di alcun segno gli spigoli sopra i quali l'inclinazione resta costante ; dico che facendo il giro dell'angolo solido si dovranno trovare almeno quattro cambiamenti di segni da uno spigolo al seguente.* Per mezzo di questa proposizione e del teorema di Eulero sopra i poliedri (*Prop. 25, lib. VII*) possiamo ora dimostrare il seguente teorema in tutta la sua generalità.

TEOREMA

In ogni poliedro convesso, ciascun angolo del quale sia formato da più di tre angoli piani, è sempre impossibile di far variare le inclinazioni dei piani di questo solido, in modo da produrre un secondo poliedro che sia formato dagli stessi piani disposti tra loro nello stesso modo che nel poliedro dato.

Per dimostrare questa proposizione, bisogna distinguere due casi, secondo che si facciano variare le inclinazioni sopra tutti gli spigoli o solamente alcune di queste inclinazioni.

Primo caso.

Supponiamo che si facciano variare nel tempo stesso le inclinazioni sopra tutti gli spigoli, e sia N il numero totale dei cambiamenti di segno che si troveranno da uno spigolo al seguente, facendo il giro di ogni angolo solido.

Si è veduto nel lemma II, che il numero dei cambiamenti di segno non può essere minore di quattro per ogni angolo solido.

Dunque se si chiami S il numero degli angoli solidi, si avrà $N > 4S$, il segno $>$ non escludendo l' eguaglianza.

Osservo ora che due spigoli consecutivi di un angolo solido appartengono sempre ad una faccia del poliedro, e che non appartengono che ad una sola; dunque il numero totale dei cambiamenti di segno osservati sopra gli spigoli consecutivi di ogni angolo solido dev' essere eguale al numero totale dei cambiamenti di segno osservato sopra i lati consecutivi di ciascuna faccia; poichè non vi è nessun cambiamento di segno in un sistema che non corrisponda ad un simile cambiamento nell' altro.

Ora, per ogni faccia triangolare, il numero dei cambiamenti di segno non può essere maggiore di due, poichè facendo rientrare sopra sè stessa la serie $+ - +$, ovvero la serie $+ - -$ si ottengono due cambiamenti di segno.

Per ogni faccia quadrangolare il numero dei cambiamenti di segno è di quattro al più ; il che è evidente.

In generale , se il numero dei lati di una faccia è pari $= 2n$, il massimo numero dei cambiamenti di segni che si possa trovare facendo il giro dei lati è $2n$, ciò che avrà luogo quando i lati portano alternativamente de' segni $+$ e $-$.

Ma se il numero dei lati di una faccia è dispari , $2n+1$, il massimo numero dei cambiamenti di segno sarà $2n$ solamente , poichè dando alternativamente ai lati i segni $+$ e $-$, il primo e l' ultimo avranno necessariamente lo stesso segno ; ciò che fa un cambiamento di meno di quanto sono i lati.

Ciò posto , sia a il numero dei triangoli , b il numero dei quadrilateri , c il numero dei pentagoni, etc., che compongono la superficie del poliedro dato, resulta da ciò che precede , che il numero totale dei cambiamenti di segno osservati facendo il giro di ogni faccia non potrà eccedere $2a$ sulle facce triangolari, $4b$ sopra le facce di quattro lati , $4c$ sopra quelle di cinque lati, $6b$ sopra quelle di sei lati. Dunque si avrà

$$N < 2a + 4b + 4c + 6d + 6e + 8f \times 8g + \text{etc.}$$

Sia A il numero degli spigoli del poliedro ed H quello delle sue facce , si avrà

$$2A = 3a + 4b + 5c + 6d + 7e + 8f + 9g + \text{etc.}$$

$$H = a + b + c + d + e + f + g + \text{etc.}$$

Ma secondo il teorema di Eulero, $S+H=A+2$; dunque $4S=8+4A-4H$, e facendo le sostituzioni :

$$4S = 8 + 2a + 4b + 6c + 8d + 10e + \text{etc.}$$

Paragonando questo valore al limite trovato di sopra si ricava

$$N < 4S - 8.$$

Ma non si può avere nel tempo stesso $N > 4S$, ed $N < 4S-8$; dunque è impossibile che le inclinazioni sopra gli spigoli del poliedro variano tutti nel tempo stesso senza distruggere la coerenza dei piani che formano la superficie del poliedro.

Secondo caso.

Supponiamo ora, che le inclinazioni sopra gli spigoli non variano tutti nel tempo stesso, e che ve ne siano alcuni che restano costanti.

Fig. 214. Sia FI (*fig. 214*) una sua costola, si potrà immaginare, ch' esso sia soppresso, e che le due facce adiacenti FIG, EFIH si riuniscano in una sola non piana, terminata dal contorno di forma invariabile EFGIH. Chiamiamo S', H' ed A' ciò che diventano i numeri S, H ed A, dopo la soppressione di uno spigolo, avremo $H'=H-1$, ed $A'=A-1$; d'altronde si à $S'=S$, poichè il numero degli angoli solidi è lo stesso nei due poliedri; dunque si avrà $S'+H'-A'=S+H-A=2$. Dal che si vede, che il teorema di Eulero à luogo ancora nel nuovo solido che contiene uno spigolo di meno ed una faccia di meno, poichè due facce si sono riunite in una sola non piana.

Se da questo secondo se ne sottrae ancora uno di quegli spigoli, sopra i quali l' inclinazione resta invariabile, la soppressione di questo spigolo darà luogo di nuovo alla riunione di due facce contigue in una sola; si dimostrerà similmente, che il teorema di Eulero à luogo ancora nel terzo solido che resulta dalla soppressione di due spigoli.

Si può continuare a sopprimere tanti spigoli quanti se ne vogliano, purchè questa soppressione non porta quella di qualche angolo solido, ed il teorema di Eulero avrà sempre luogo nel solido restante. Questo è ciò che si può vedere direttamente e generalmente, esaminando la dimostrazione che abbiamo data del teorema di Eulero; in fatti questa dimostrazione non suppone che le facce del poliedro siano piane; essa avrebbe egualmente luogo quando anche queste facce fossero terminate da contorni non situati nei medesimi piani; essa suppone che ogni contorno sia rappresentato, secondo la nostra costruzione, da un poligono sferico, e che la somma delle superficie di questi poligoni sia eguale alla superficie della sfera. E non è anche necessario, che tutti questi poligoni siano convessi, basta che ciascuno di essi possa essere riguardato come la somma di più poligoni convessi, il che à sempre luogo, allorchè, colla soppressione di più spigoli appar-

tenenti al poliedro dato, più facce piane si riuniranno in una sola non piana; poichè allora il poligono sferico che rappresenta quest' ultima sarà composto dalla somma dei poligoni sferici convessi che rappresentano le facce piane soppresse.

Veniamo ora al caso in cui la soppressione degli spigoli, sopra i quali la inclinazione non varia, porta seco quella di uno o di più angoli solidi, sia perchè le inclinazioni sopra tutti gli spigoli, in ciascuno di questi angoli, sia invariabile; sia perchè queste inclinazioni non potrebbero variare che sopra tre spigoli solamente, ed allora essi sarebbero necessariamente costanti.

Supponiamo in primo, che non si sopprima che un angolo solido, e sia m il numero delle facce di questo angolo o il numero degli spigoli che terminano al suo vertice. Sopprimendo l'angolo solido cui si tratta, si sopprimeranno nel tempo stesso m spigoli, e le m facce formando l'angolo solido si ridurranno ad una sola; dunque se si disegnino con S', A', H' ciò che diventano i numeri S, A, H, dopo la soppressione di un angolo solido si avrà $S'=S-1$, $A'=A-m$, $H'=H-(m-1)$. Dal che si ricava $S'+H'-A'=S+H-A=2$: dunque il teorema di Eulero à luogo ancora nel nuovo solido.

Ora egli è chiaro, che si possono sopprimere tanti angoli solidi, quanti se ne vorranno dal poliedro dato, e che il teorema di Eulero avrà sempre luogo nel poliedro restante; poichè sopprimendo gli angoli solidi ad uno ad uno, si ànno necessariamente differenti poliedri, dei quali due consecutivi restano nel caso che abbiamo esaminato.

Dunque in generale, se dal poliedro proposto si sopprimano tutti gli spigoli sopra i quali l' inclinazione non varia punto; sia che con questa soppressione il numero degli angoli solidi resti lo stesso, o che esso diventi minore, il poliedro che resta soddisferà sempre al teorema di Eulero, cioè a dire, che chiamando s, h, a, le quantità che per questo poliedro corrispondono alle quantità S, H, A, del poliedro proposto, si avrà $s+h-a=S+H-A=2$.

Ma in questo ultimo solido, le inclinazioni sopra gli spigoli dovranno tutte variare, poichè si sono soppressi tutti gli spigoli sopra i quali l'inclinazione non varia punto; dunque questo solido entra nel primo caso: quindi la variazione simultanea di tutte queste inclinazioni non potrebbe aver luogo senza disnaturare il solido.

Dunque, in fine, un poliedro convesso qualunque non può essere cambiato in un altro poliedro convesso che sia compreso sotto gli stessi piani poligonali e disposti nel medesimo ordine gli uni a riguardo degli altri.

FINE DELLE NOTE.

CONSIGLIO GENERALE
di Pubblica Istruzione

RIP.° CAR.°

N.° 12

OGGETTO

Napoli 3 Giugno 1859

Vista la dimanda del tipografo Paolo de Simone, con la quale ha chiesto di ristampare l' opera intitolata - *Elementi di Geometria Solida di A. M. Legendre.*

Visto il parere del Regio Revisore D. Ambrogio Mendia.

Si permette che la suindicata opera si ristampi, però non si pubblichi senza un secondo permesso, che non si darà se prima lo stesso Regio Revisore non avrà attestato di aver riconosciuto nel confronto esser l' impressione uniforme all' originale approvato.

Il Segretario Generale
GIUSEPPE PIETROCOLA

Il Consultore di Stato
Presidente provvisorio
CAPOMAZZA

COMMESSIONE ARCIVESCOVILE PER LA REVISIONE DE' LIBRI

Nihil obstat
REV. JOSEPH MOLINARI

Imprimatur
pro Dep.°
LEOP. RUGGIERO.

198
S
I
B
B'
A
C
K
O
E
b
S
A
B
C
O
203
T
D
F
E
A
202
B
C
S
O
T
P
H
G
Q
O
N
E
F
M
L
I
K
210
D
C
A
B
F. Gandi inc.

Legendre Geom. Solida Tav. III
216
222
220
226
210
F. Gardu

229
230
231
232
233
236
240
241
246

F. Giraldi

272
273
280
281
286
287
F. Garolfi inc.